

# SAI LẦM THƯỜNG GẶP TRONG GIẢI TOÁN

## I. Sai lầm trong các bài toán tìm Max, Min:

**\*\* Cần nhớ:**

- $Max_{[a,b]}(f(x)) = c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq c, \forall x \in [a,b], (1) \\ \exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) = c, (2) \end{cases}$
- $Min_{[a,b]}(f(x)) = c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq c, \forall x \in [a,b], (3) \\ \exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) = c, (4) \end{cases}$

**Ví dụ 1:** Tìm Max, Min của  $y = \sin^{2006} x + \cos^{2006} x$

**\*\* Sai lầm thường gặp:**

**Ta có:**

$$y = \sin^{2006} x + \cos^{2006} x \geq 0 \Rightarrow y_{\min} = 0$$

$$y = \sin^{2006} x + \cos^{2006} x \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow y_{\max} = 2$$

➤ **Nguyên nhân sai lầm:**

- $y_{\min} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$ , Vô lí vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow$  dấu bằng không xảy ra  $\Rightarrow$  điều kiện (2) không thỏa.
- $y_{\max} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^{2006} x = 1 \\ \cos^{2006} x = 1 \end{cases}$ , Vô lí vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

**\*\* Giải đúng:**

$$y = (\sin^2 x)^{1003} + (\cos^2 x)^{1003}$$

$$\Leftrightarrow y = (1 - \cos^2 x)^{1003} + (\cos^2 x)^{1003}$$

$$\Leftrightarrow y = (1 - t)^{1003} + t^{1003}, \text{ Với } 0 \leq t = \cos^2 x \leq 1$$

- $y' = -1003(1 - t)^{1002} + 1003t^{1002} = 0$

$$\Leftrightarrow (1 - t)^{1002} = t^{1002}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t = t \\ 1 - t = -t \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

- $y(0) = 1$

$$y(1) = 1$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1002}}$$

**Vậy:**  $Maxy = 1; Miny = \frac{1}{2^{1002}}$

**Ví dụ 2:** Tìm Max, Min của  $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x + 2}$

**\*\* Sai lầm thường gặp:**

$$y = \frac{(1 + \cos x) + 1}{\sin x + \cos x + 2} \geq \frac{1}{1 + 1 + 2} \Rightarrow y_{\min} = \frac{1}{4}$$

➤ **Nguyên nhân sai lầm:**

$$y_{\min} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}, \text{ Vô lí vì dấu bằng không xảy ra.}$$

**\*\* Giải đúng:**

TXĐ:  $\mathbb{R}$

$$y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x + 2}$$

$$\Leftrightarrow y \sin x + (y - 1) \cos x + 2y - 2 = 0, (*)$$

Để có Max, Min thì (\*) phải có nghiệm x, điều này tương đương với:

$$y^2 + (y - 1)^2 \geq (2y - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 6y + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow y_{\min} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}; y_{\max} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

**\*\* Chú ý:**

$A \sin x + B \cos x = C$ , có nghiệm

$$\Leftrightarrow A^2 + B^2 \geq C^2$$

## II. Sai lầm trong các bài toán dùng tính đơn điệu:

**Ví dụ 1:** (ĐH khối A, 2003)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$$

**\*\* Sai lầm thường gặp:**

Xét hàm số  $f(t) = t - \frac{1}{t}$  với  $t \neq 0$

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$$

$\Rightarrow f(t)$  tăng với  $t \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

➤ **Nguyên nhân sai lầm:**

Vì hàm  $f(t)$  gián đoạn tại  $t = 0$ , nên không thể dùng tính đơn điệu.

**\*\* Giải đúng:**

$$\begin{aligned} \text{Hệ} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=0 \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \neq 1 \vee xy=-1 \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=y \neq 0 \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-1 \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=y \neq 0 \\ x^3-2x+1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-1 \\ \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=0 \quad VN \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=y=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

**Ví dụ 2:** Tìm m để hàm số  $y = \frac{x+m}{x-m}$  đồng biến trên  $(1, +\infty)$

**\*\* Sai lầm thường gặp:**

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow y' = \frac{-2m}{(x-m)^2} \geq 0, \forall x \in (1, +\infty) \Leftrightarrow -2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$$

➤ **Nguyên nhân sai lầm:**

Không giải  $x \neq m, \forall x \in (1, +\infty)$

**\*\* Giải đúng:**

$$\begin{aligned} \text{YCBT} &\Leftrightarrow y' = \frac{-2m}{(x-m)^2} \geq 0, \forall x \in (1, +\infty) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2m \geq 0 \\ x \neq m, \forall x \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \end{aligned}$$

**\*\* Chú ý:**

$$\frac{A}{B^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$$

### III. Sai lầm trong các bài toán giải Bpt căn thức:

**Ví dụ 1:** (ĐH khối D, 2002)

Giải bất phương trình:

$$(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$$

**\*\* Sai lầm thường gặp:**

$$\begin{aligned} &(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \vee x \leq 0 \\ x \geq 2 \vee x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

➤ **Nguyên nhân sai lầm:**

$$A\sqrt{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}, \text{ Sai lầm bởi vì nếu } B = 0, \text{ thì Bpt đúng với mọi } A, \text{ mà không cần } A \geq 0$$

**\*\* Giải đúng:**

$$\text{❖ Cách 1: } (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ 2x^2 - 3x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \\ x > 2 \vee x < -\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \vee x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \geq 3 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

**\*\* Chú ý:**

$$A^2 \sqrt[n]{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ B > 0 \\ A \geq 0 \end{cases}$$

**❖ Cách 2:** Có thể xét dấu:

$x$		$-\frac{1}{2}$		$0$		$2$		$3$	
$\sqrt{2x^2 - 3x - 2}$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 3x$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
YCBT	+	0	-	-	-	0	-	0	+

Vậy nghiệm là: 
$$\begin{cases} x = 2 \\ x \geq 3 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

**\*\* Bài tập:** Áp dụng giải các Bpt sau:

- 1)  $(2x - 5)\sqrt{2x^2 - 5x + 2} \geq 0$
- 2)  $\sqrt{3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x} + 1(\log_3^2 x - 1) \geq 0$
- 3)  $\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}(\log_3 x - 27)(2^x - 4) \geq 0$
- 4)  $\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}|x - 2|} \left( x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{9}{5} \right) \geq 0$

## **Ví dụ 2:**

Giải bất phương trình:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{2^{x-2} - 4} \geq 0$$

**\*\* Sai lầm thường gặp:**

$$\frac{\sqrt{x-1}}{2^{x-2}-4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2^{x-1}-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

➤ **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\frac{\sqrt{A}}{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases}, \text{ Sai lầm bởi vì nếu } A = 0, \text{ thì Bpt đúng với mọi } B, \text{ mà không cần } B > 0$$

\*\* **Giải đúng:**

$$\frac{\sqrt{x-1}}{2^{x-2}-4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ \begin{cases} x-1 > 0 \\ 2^{x-1}-4 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

\*\* **Chú ý:**

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \end{cases}$$

### **Ví dụ 3:**

Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} \leq \sqrt{x^2+4x-5}$$

\*\* **Sai lầm thường gặp:**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ x^2+2x-3 \geq 0 \\ x^2+4x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \vee x \leq -2 \\ x \geq 1 \vee x \leq -3 \\ x \geq 1 \vee x \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -5 \end{cases}$$

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+2)} + \sqrt{(x-1)(x+3)} \leq \sqrt{(x-1)(x+5)}, (1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}\sqrt{x+3} \leq \sqrt{x-1}\sqrt{x+5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt{x+5}$$

$$\Leftrightarrow 2x+5 + 2\sqrt{x+2}\sqrt{x+3} \leq x+5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}\sqrt{x+3} \leq -x$$

➤ **Nguyên nhân sai lầm:**

Vì  $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$  sai khi A, B đều âm.

\*\* **Giải đúng:**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -5 \end{cases}$$

**TH 1:**  $x = 1$ , thế vào (1):  $0 \leq 0$  đúng  $\Rightarrow x = 1$  nhận

**TH 2:**  $x > 1$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}\sqrt{x+3} \leq \sqrt{x-1}\sqrt{x+5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt{x+5}$$

$$\Leftrightarrow 2x+5 + 2\sqrt{x+2}\sqrt{x+3} \leq x+5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}\sqrt{x+3} \leq -x \text{ Vô nghiệm vì } x > 1$$

**TH 3:**  $x \leq -5$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-3} \leq \sqrt{-x-5}$$

$$\Leftrightarrow -2x-5+2\sqrt{-x-2}\sqrt{-x-3} \leq -x-5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{-x-2}\sqrt{-x-3} \leq x \text{ Vô nghiệm vì } x \leq -5$$

Vậy nghiệm của Bpt là  $x = 1$ .

**\*\* Chú ý:**

$$\sqrt{A.B} = \begin{cases} \sqrt{A}\sqrt{B}, \text{ nếu } \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \\ \sqrt{-A}\sqrt{-B}, \text{ nếu } \begin{cases} A \leq 0 \\ B \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

**\*\* Bài tập:** Áp dụng giải các Bpt sau:

$$1) \sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} \leq \sqrt{4x^2-18x+18}$$

$$2) \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

#### **IV. Sai lầm trong việc dùng phương trình hệ quả:**

##### **Ví dụ:**

Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{2x-3} = 1, (1)$$

**\*\* Sai lầm thường gặp:**

Lũy thừa 2 vế của (1), ta có:

$$x-2+2x-3+3\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{2x-3}(\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{2x-3})=1$$

$$\Rightarrow 3x-5+3\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{2x-3}=1, (2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{2x-3}=2-x$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x-3)=(2-x)^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm là: } \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

➤ **Nguyên nhân sai lầm:**

Pt (2) là pt hệ quả của pt (1), do đó khi giải ra nghiệm ta phải thử lại.

**\*\* Giải đúng:**

Thử lại, bằng cách thế  $x = 2, x = 1$  lần lượt vào (1), ta chỉ nhận một nghiệm  $x = 2$ .

**\*\* Bài tập:** Áp dụng giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{9x}, \text{ ĐS: } 0, 3, -\frac{6}{5}$$

$$2) \sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1, \text{ ĐS: } 30, -61$$

#### **V. Sai lầm trong các bài toán Lagarit:**

## Ví dụ 1:

Giải phương trình:

$$\text{Log}_9(x^2 - 5x + 6)^2 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \frac{x-1}{2} + \log_3 |x-3|$$

**\*\* Sai lầm thường gặp:**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ \frac{x-1}{2} > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \text{Log}_3(x^2 - 5x + 6) = \log_3 \frac{x-1}{2} + \log_3 |x-3|$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = \frac{x-1}{2} |x-3|$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = \frac{x-1}{2} |x-3|, \text{ Vì } x > 3$$

$$\Leftrightarrow x-2 = \frac{x-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3, \text{ Pt vô nghiệm}$$

➤ **Nguyên nhân sai lầm:**

- **Sai lầm 1:** Đặt điều kiện không đúng
- **Sai lầm 2:** Sử dụng công thức không đúng

**\*\* Chú ý:**

$$A^{2n} > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$$

$$|A| > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$$

$$\text{Log}_{a^n}(f(x))^k = \frac{k}{n} \log_a |f(x)|$$

**\*\* Giải đúng:**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} (x^2 - 5x + 6)^2 > 0 \\ \frac{x-1}{2} > 0 \\ |x-3| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \neq 0 \\ x > 1 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \text{Log}_3 |x^2 - 5x + 6| = \log_3 \frac{x-1}{2} + \log_3 |x-3|$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 5x + 6| = \frac{x-1}{2} |x-3| \Leftrightarrow |x-2||x-3| = \frac{x-1}{2} |x-3|$$

$$\Leftrightarrow |x-2| = \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{x-1}{2} \\ x-2 = -\frac{x-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = \frac{5}{3}$

## Ví dụ 2:

Giải phương trình:

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)^3$$

\*\* Sai lầm thường gặp:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} (x+2)^2 > 0 \\ (4-x)^3 > 0 \\ (x+6)^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ -4 < x < 4 \\ -6 < x < 4 \end{cases}$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^3 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)^3$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} \left( (x+2)^3 : \left( \frac{1}{4} \right)^3 \right) = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3 (x+6)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^3 \cdot 4^3 = (4-x)^3 (x+6)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \cdot 4 = (4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 2 \end{cases}, \text{ Vậy nghiệm: } x = 2$$

➤ Nguyên nhân sai lầm:

Công thức  $m \log_a x = \log_a x^m$ , chỉ đúng khi m nguyên, bài trên giải sai, bởi vì

$m = \frac{3}{2}$  không phải là số nguyên.

\*\* Giải đúng:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq -2 \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 3 \log_{\frac{1}{4}} |x+2| - 3 = 3 \log_{\frac{1}{4}} (4-x) + 3 \log_{\frac{1}{4}} (x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} |x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x) + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} |x+2| \cdot 4 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow |x+2| \cdot 4 = (4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2) = (4-x)(x+6) \\ 4(x+2) = -(4-x)(x+6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x - 16 = 0 \\ x^2 - 2x - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -8 \\ x = 1 - \sqrt{33} \vee x = 1 + \sqrt{33} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = 2 \vee x = 1 - \sqrt{33}$



# Sai lầm khi giải các bài toán tam thức bậc hai

**K**hi giải toán tam thức bậc hai, các sai lầm xuất hiện do không chú ý đến giả thiết của các định lý mà đã vội vàng áp dụng hoặc lạm dụng suy diễn những mệnh đề không đúng hoặc xét thiếu các trường hợp cần biện luận.

**Thí dụ 1:** Tìm  $m$  để biểu thức sau có nghĩa với mọi  $x$ :

$$\sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3}.$$

(?) Biểu thức có nghĩa với mọi  $x$  khi và chỉ khi

$$f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0 \quad \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta'_x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ (m-1)^2 - 3(m-1)(m+1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 2(m-1)(m+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Ta có kết quả  $m \geq 1$

(!) Nhớ rằng  $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}. \text{ Lời giải xét thiếu trường hợp } a = 0.$$

**Lời giải đúng là:**

Biểu thức có nghĩa với mọi  $x \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x$

- Trường hợp 1:  $\begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = 0 \\ -2(m-1) = 0 \\ 3m-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \\ m \geq 1 \end{cases}, \text{ không có } m \text{ thỏa mãn.}$

- Trường hợp 2:  $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$

Tóm lại kết quả là  $m \geq 1$

**Thí dụ 2:** Tìm  $m$  sao cho:  $\frac{x^2 - 2mx + 3m + 2}{2x^2 - mx + 2} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$ .

(?)  $(*) \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 3m + 2 \leq 2x^2 - mx + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 + mx - 3m \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m \leq 0 \Leftrightarrow -12 \leq m \leq 0$

(!) Sai lầm là nhân hai vế với  $2x^2 - mx + 2$  khi chưa biết dấu của biểu thức này.

**Lời giải đúng là:** Vế trái tồn tại  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2 - mx + 2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - mx + 2 = 0$  vô nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$ .

Khi đó  $2x^2 - mx + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  nên:

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x^2 - 2mx + 3m + 2 \leq 2x^2 - mx + 2 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 4 \\ x^2 + mx - 3m \geq 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 4 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 4 \\ m^2 + 12m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 4 \\ -12 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq 0$

**Thí dụ 3:** Biết rằng  $(x; y)$  là nghiệm của hệ:  $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \end{cases}$ .

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức  $F = xy - 6(x + y)$ .

?

Ta có  $x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = -m^2 + 6$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2xy = -m^2 + 6 \Leftrightarrow xy = m^2 - 3.$$

$$\text{Do đó } F = m^2 - 3 - 6m = (m - 3)^2 - 12.$$

Vậy  $\min F = -12 \Leftrightarrow m = 3$ . Không có  $\max F$  vì  $F$  là hàm bậc hai với hệ số bậc hai dương.

!

Lời giải không đặt điều kiện để tồn tại  $x$  và  $y$ . Do đó đã xét  $F$  với mọi  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải đúng là:**

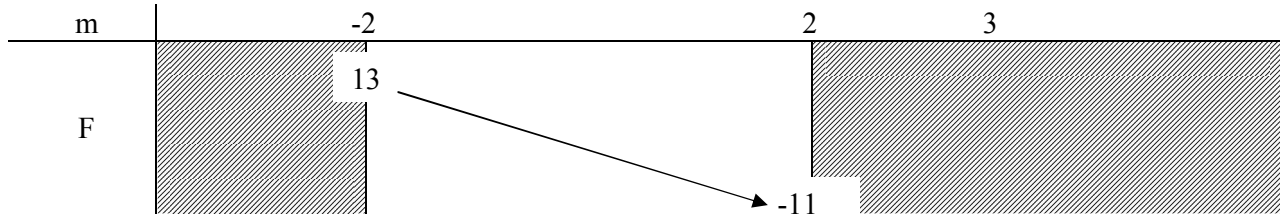
$$\text{Ta có } \begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ xy = m^2 - 3 \end{cases}$$

Theo định lý Viét đảo thì  $x, y$  là các nghiệm của phương trình  $t^2 - mt + m^2 - 3 = 0$  (\*).

Ta thấy  $x, y$  tồn tại khi và chỉ khi (\*) có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta_1 \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$ .

Khi đó  $F = m^2 - 3m - 6$  với  $m \in [-2; 2]$ .

Lập bảng biến thiên của  $F$  với  $m \in [-2; 2]$ :



$$\begin{aligned} \text{Từ đó ta có:} \quad \min F = -11 &\Leftrightarrow m = 2 \\ \max F = 13 &\Leftrightarrow m = -2. \end{aligned}$$

**Thí dụ 4:** Tìm  $m$  sao cho phương trình:  $x^2 - (2m + 1)x + m^2 = 0$  chỉ có một nghiệm thỏa mãn  $x > 3$

?

**Cách 1:** Phương trình có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow \Delta = 0$ . Khi đó phương trình có nghiệm  $x_1 = x_2 = \frac{S}{2}$ . Do đó phương trình chỉ có một nghiệm thỏa mãn  $x > 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m + 1)^2 - 4m^2 = 0 \\ \frac{2m + 1}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 1 = 0 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ m > \frac{5}{2} \end{cases}, \text{ không có } m \text{ thỏa mãn bài toán.}$$

**Cách 2:** Xét 3 trường hợp:

$$\text{- Trường hợp 1: } 3 < x_1 = x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{S}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ m > \frac{5}{2} \end{cases}, \text{ không có } m \text{ thỏa mãn T.H này.}$$

- Trường hợp 2:

$$x_1 \leq 3 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(3) \leq 0 \\ 3 < \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 6 \leq 0 \\ \frac{2m + 1}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{3} \leq m \leq 3 + \sqrt{3} \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m \leq 3 + \sqrt{3}.$$

Tóm lại  $m \in \left(\frac{5}{2}; 3 + \sqrt{3}\right]$

!

Cách 1 tỏ ra người giải chưa hiểu cụm từ "chỉ có một nghiệm" nên đã "phiên dịch" từng đoạn theo yêu cầu, thành ra khác với nghĩa của bài toán. Nhớ cho: phương trình chỉ có một nghiệm  $x > 3$  không có nghĩa là phương trình không được có 2 nghiệm ! Cách 2 là lời giải của người hiểu đúng bài toán nhưng cố gắng làm gọn 2 trường hợp  $x_1 < 3 < x_2$  và  $3 = x_1 < x_2$  thành một trường hợp  $x_1 \leq 3 < x_2$ . Tiếc rằng khi viết điều kiện "tương đương" với yêu cầu này lại không đúng. Như vậy sẽ bỏ sót trường hợp  $x_1 < \frac{S}{2} < 3 < x_2$ . Chính vì vậy mà với  $m = 2$  phương trình trở thành  $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$  thoả

mãn bài toán, nhưng  $m = 2$  không có trong kết luận của cách giải thứ 2.

**Lời giải đúng là:**

Xét 3 trường hợp:

$$\text{- Trường hợp 1: } 3 < x_1 = x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{S}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ m > \frac{5}{2} \end{cases}, \text{ không có } m \text{ thoả mãn T.H này.}$$

$$\text{- Trường hợp 2: } 3 = x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(3) = 0 \\ 3 < \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 6 = 0 \\ \frac{2m+1}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \pm \sqrt{3} \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 3 + \sqrt{3}.$$

$$\text{- Trường hợp 3: } x_1 < 3 < x_2 \Leftrightarrow af(3) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 6 < 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{3} < m < 3 + \sqrt{3}.$$

$$\text{Tóm lại: } m \in (3 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3}).$$

$$\text{- Trường hợp 3: } x_1 < 3 < x_2 \Leftrightarrow af(3) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 6 < 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{3} < m < 3 + \sqrt{3}.$$

$$\text{Tóm lại: } m \in (3 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3}).$$

**Thí dụ 5:** Tìm  $m$  sao cho phương trình  $mx^2 - 2(m+1)x + m+1 = 0$  không có nghiệm ở ngoài  $(-1; 1)$ .

⊙ Phương trình không có nghiệm ở ngoài  $(-1; 1)$   $-1 < x_1 \leq x_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_x \geq 0 \\ af(-1) > 0 \\ af(1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - m(m+1) \geq 0 \\ m(4m+3) > 0 \\ -m > 0 \\ -1 < \frac{m+1}{m} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m > 0 \\ m < -\frac{3}{4} \\ m < 0 \\ -1 < \frac{m+1}{m} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < -\frac{3}{4}$$

⊙ Có thể thấy với  $m = 0$  thì phương trình trở thành  $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in (-1; 1)$  nên  $m = 0$  thoả

mãn. Ngoài ra lời giải còn thiếu cả trường hợp phương trình vô nghiệm.

Như vậy để có lời giải đúng phải bổ sung thêm trường hợp  $a = 0$  (thử trực tiếp) và trường hợp

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta'_x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Đáp số đúng là } m < -\frac{3}{4} \text{ hoặc } m = 0$$

# SAI LẦM KHI TÍNH TÍCH PHÂN

## 1. Đổi biến số nhưng không đổi cận.

**VD1:** tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-x^2} dx$

**Giải:**

*Lời giải sai:* đặt  $x = \sin t$  suy ra  $dx = \cos t dt$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

*Lời giải đúng:*

ặt  $x = \sin t$  suy ra  $dx = \cos t dt$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \arcsin \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\arcsin \frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\arcsin \frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \int_0^{\arcsin \frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \left( 2 \arcsin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

## 2. Khi đổi biến không tính vi phân

**VD2:** tính  $I = \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^5}$

**Giải:**

*Lời giải sai:*

đặt  $t = 2x + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=3 \\ x=0 \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$I = \int_1^3 \frac{dt}{t^5} = -\frac{t^{-4}}{4} \Big|_1^3 = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{3^4} - 1 \right) = \frac{20}{81}$$

*Lời giải đúng:*

đặt  $t = 2x+1$  suy ra  $dt = 2dx$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=3 \\ x=0 \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$I = \int_1^3 \frac{dt}{2t^5} = -\frac{t^{-4}}{8} \Big|_1^3 = -\frac{1}{8} \left( \frac{1}{3^4} - 1 \right) = \frac{10}{81}$$

### 3. Tính nguyên hàm sai, hiểu sai bản chất công thức

**VĐ1:** Tính  $I = \int_0^2 x.e^x dx$

**Giải:**

*\* lời giải sai:*

$$\text{đặt } \begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$$
$$\Rightarrow I = (xe^x) \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = e^2 + 1$$

*\*Lời giải đúng:*

$$\text{đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$
$$\Rightarrow I = (xe^x) \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = e^2 + 1$$

### VẤN ĐỀ 2: SAI LẦM KHI CHÚNG MINH ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

**VÍ DỤ 1:** cho  $n \in \mathbb{N}$ ; CMR  $I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0$

*\* Lời giải sai:*

xét  $f(x) = \sin(\sin x + nx)$  trên  $[0; 2\pi]$  ta có:

$f(x)$  là hàm liên tục trên  $[0; 2\pi]$  và

$$f(-x) = \sin(\sin(-x) - nx) = -f(x)$$

vậy  $f(x)$  là hàm lẻ  $\Rightarrow I = 0$

**\*Nguyên nhân sai lầm:** Học sinh hiểu sai định lý. “ Nếu hàm số  $f(x)$  là hàm lẻ, liên tục trên

$[-a; a]$  thì  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ”

*\* Lời giải đúng:* Đặt  $x = \pi + y$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin y + ny + n\pi) dx = (-1)^n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ny - \sin y) dx$$

Mặt khác ta có:  $g(y) = \sin(ny - \sin y)$  xác định trên  $[-\pi, \pi]$  là hàm liên tục và

$$g(-y) = \sin(-ny - \sin(-y)) = -\sin(ny - \sin y) = -g(y) \Rightarrow g(y) \text{ là hàm lẻ.}$$

Vậy thì  $I = 0$

**VÍ DỤ 2:** cho hàm số  $f$  liên tục trên  $[0, \pi]$ . Hãy so sánh

$$I = \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx \quad \text{và} \quad J = \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

*\*Lời giải sai:*

Tích phân từng phần:  $\begin{cases} u = x \\ dv = f(\sin x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -f(\cos x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -xf(\cos x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(\cos x) dx$$

Do  $f$  liên tục  $/[0; \pi] \Rightarrow f(\cos \pi) = f(0) = 0 \Rightarrow I = \int_0^{\pi} f(\cos x) dx$  (1)

$$\text{Mà } J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có  $I \neq J$

**\* Nguyên nhân sai lầm:**

Học sinh không hiểu về hàm liên tục, tích phân và vi phân.

**\* Lời giải đúng:**

Đặt  $x = \pi - t$  ta có:

$$I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = - \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx$$

$$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

Vậy ta có  $I=J$

**VÍ DỤ 3:** Cho hàm số  $f$  liên tục trên  $[a, b]$ . CMR tồn tại ít nhất 1 điểm  $C \in [a, b]$  sao cho:

$$\int_a^c [f(x) - f(c)] dx = \int_c^b [f(c) - f(x)] dx$$

**\* Lời giải sai.**

Do  $f$  liên tục trên  $[a, b] \Rightarrow f(x) - f(c) / [a, c]$  bằng  $f(x) - f(c)$  trên  $[b, c]$  vậy ta có:

$$\int_a^c [f(x) - f(c)] dx = \int_b^c [f(x) - f(c)] dx = \int_c^b [f(c) - f(x)] dx$$

**\* Nguyên nhân sai lầm:**

Không hiểu về hàm liên tục lên tính tích phân sai.

**\* Lời giải đúng:**

áp dụng định lí về giá trị trung bình của tích phân  $\Rightarrow \exists$  ít nhất một điểm  $C \in [a, b]$  sao cho:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) = \int_a^b f(c) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b [f(x) - f(c)] dx = \int_a^c [f(x) - f(c)] dx + \int_c^b [f(x) - f(c)] dx = 0$$

$$\text{Hay ta có: } \int_a^c [f(x) - f(c)] dx = \int_c^b [f(c) - f(x)] dx \quad (\text{ĐPCM}).$$

## VẤN ĐỀ: SAI LẦM KHI TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG BẰNG TÍCH PHÂN

### I. Kiến thức chung

- Cho hàm số  $y = f(x)$  khả tích trên  $[a; b]$ . Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi: ox,

$$y = f(x), x = a, x = b \text{ là: } S = \int_a^b |f(x)| dx$$

### II. Những sai lầm thường gặp

#### 1. Sử dụng sai công thức

**VD1:** tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = 0; x = 1; x = 4 \end{cases}$

**Lời giải sai:**

Diện tích hình phẳng là:

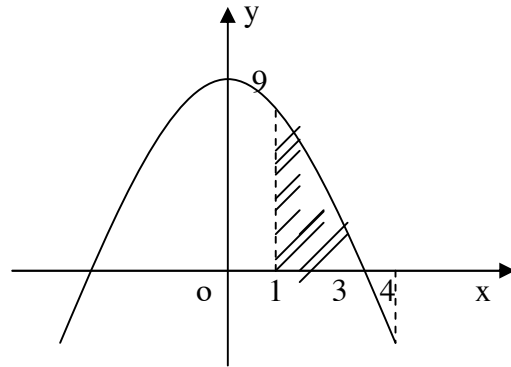
$$S = \int_1^4 (9 - x^2) dx = \left( 9x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_1^4 = 7$$

**Sai lầm:** áp dụng sai công thức tính diện tích

**Lời giải đúng:**

Diện tích hình phẳng là:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 |9 - x^2| dx \\ &= \int_1^3 (9 - x^2) dx + \int_3^4 (x^2 - 9) dx \\ &= \left( 9x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_1^3 + \left( \frac{1}{3}x^3 - 9x \right) \Big|_3^4 = \frac{65}{2} - 9 = \frac{38}{3} \end{aligned}$$



## 2. Xác định không chính xác hình cần tính giới hạn

**VD:** tính diện tích hình giới hạn bởi:  $\begin{cases} y = 0; & y = 1 \\ y^2 = x - 1; & x = 0 \end{cases}$

**Lời giải sai:**  $y^2 = x - 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x - 1}$

$$y = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 2$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_1^2 \sqrt{x - 1} dx = \frac{2}{3} (x - 1)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{2}{3}$$

**Sai lầm:** xác định sai hình cần tính diện tích do không vẽ đường giới hạn

**Lời giải đúng:**

Vẽ hình giới hạn:

Vậy diện tích hình giới hạn là:

$$S = S_1 + S_2 \text{ với :}$$

$$S_1 = 1^2 = 1$$

$$S_2 = \int_1^2 (1 - \sqrt{x - 1}) dx = \left[ x - \frac{2}{3} (x - 1)^{3/2} \right] \Big|_1^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{4}{3}$$

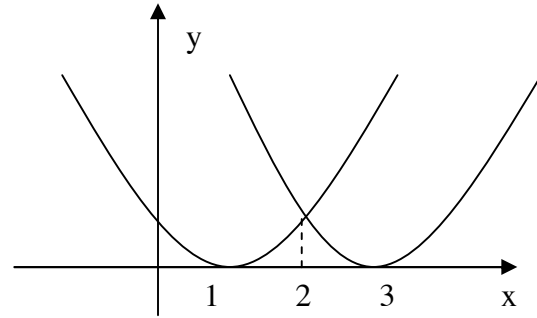
## 3. Xác định sai hình cần tính giới hạn.

**VD:** Tìm diện tích hình giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 & (C_1) \\ y = x^2 + 6x + 9 & (C_2) \\ x = \frac{3}{2}; x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Lời giải sai:

$$C_1 \cap C_2 = (2; 1)$$



Vậy diện tích của hình giới hạn là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{3}{2}}^2 (x-1)^2 dx + \int_2^{\frac{5}{2}} (x-3)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} (x-1)^3 \Big|_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{1}{3} (x-3)^3 \Big|_2^{\frac{5}{2}} \\ &= \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{24} \right) + \left( -\frac{1}{24} + \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

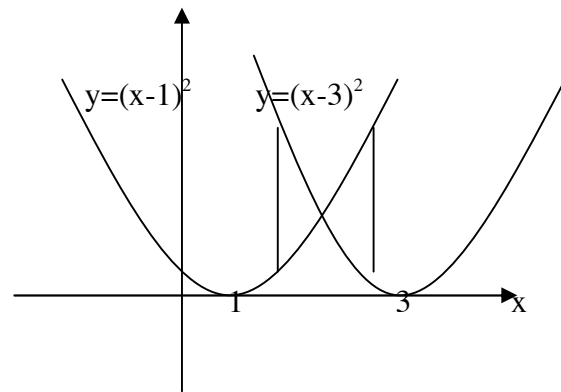
Sai lầm: Xác định sai hình cần tính giới hạn

Lời giải đúng:

$$C_1 \cap C_2 = (2; 1)$$

Diện tích hình giới hạn là:

$$S = S_1 + S_2$$



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\frac{3}{2}}^2 \left[ (x-3)^2 - (x-1)^2 \right] dx \\ &= \int_{\frac{3}{2}}^2 (-4x + 8) dx = \left( -2x^2 + 8x \right) \Big|_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{1}{2} \\ S_2 &= \int_2^{\frac{5}{2}} \left[ (x-1)^2 - (x-3)^2 \right] dx \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} (4x - 8) dx = \left( 2x^2 - 8x \right) \Big|_2^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

**VẤN ĐỀ: DỰ KIẾN SAI LẦM KHI TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY BẰNG TÍCH PHÂN.  
I, CÔNG THỨC:**



$$\text{Cho hình phẳng giới hạn bởi } \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Vox = \pi \int_0^b f^2(x) dx \\ Voy = 2\pi \int_0^b xf(x) dx \end{cases}$$

$$\text{Nếu hình phẳng giới hạn bởi } \begin{cases} x = f(y) = x_1 \\ x = g(y) = x_2 \\ c \leq y \leq d \\ f(y) \cdot g(y) > 0 \end{cases} \Rightarrow Voy = \pi \int_c^d |x_1^2 - x_2^2| dy$$

## II, MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP:

### 1. SỬ DỤNG CÔNG THỨC BỎ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI:

**VÍ DỤ 1:** Tính thể tích hình xuyên gây bởi hình tròn  $x^2 + (y-b)^2 \leq a^2$  ( $0 < a < b$ ) quay quanh trục  $Ox$ .

\* **Lời giải sai:**

Phương trình đường tròn (C):  $x^2 + (y-b)^2 = a^2$  có thể viết

$$(y-b)^2 = a^2 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = b + \sqrt{a^2 - x^2} & (C_1) \\ y = b - \sqrt{a^2 - x^2} & (C_2) \end{cases} \quad (|x| \leq a)$$

Vậy thể tích của hình xuyên là:

$$Vox = \pi \int_{-a}^a \left( (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \right) dx = 2\pi a^2 b$$

\* **Sai lầm:** mặc dù kết quả đúng nhưng sai công thức thể tích:

$$Vox \neq \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx \quad \text{mà} \quad Vox = \pi \int_a^b |y_1^2 - y_2^2| dx.$$

\* **Lời giải đúng:**  $Vox = \pi \int_{-a}^a \left| (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \right| dx = 2\pi a^2 b$

### 2. SỬ DỤNG NHẦM Voy

**VÍ DỤ:** Tính Voy của hình  $\begin{cases} y = x^2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

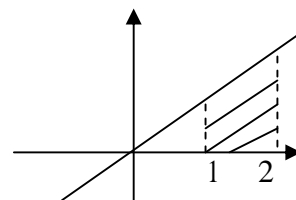
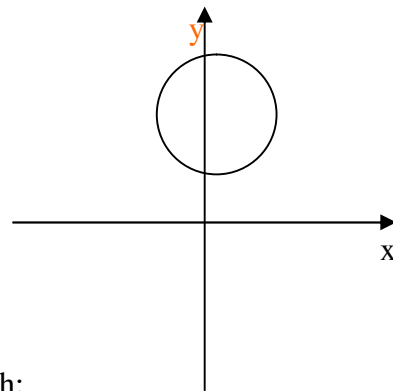
\* **Lời giải sai:**  $Voy = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = \frac{31\pi}{5}$

\* **Sai lầm:** Đã sử dụng công thức  $Voy = \pi \int_a^b y^2 dx$  đây là công thức tính diện tích Vox. Vỡ

lời giải bị sai.

\* **Lời giải đúng.**

$$Voy = 2\pi \int_1^2 x \cdot x^2 dx = \frac{15\pi}{2}$$



# MỘT SỐ SAI LẦM KHI GIẢI TOÁN TỔ HỢP

*Đối với các bạn học sinh khi mới học về toán tổ hợp thì ít nhiều cũng gặp những khó khăn nhất định. Khó khăn đầu tiên gặp phải là một bài toán không biết khi nào sử dụng tổ hợp, khi nào sử dụng chỉnh hợp, tuy nhiên khó khăn này sẽ nhanh chóng được giải quyết nếu ta để ý bản chất của tổ hợp là sắp xếp tùy ý ko có thứ tự, còn chỉnh hợp thì có thứ tự. Vấn đề tôi nêu trong bài viết này là một số sai lầm cơ bản khi giải toán về tổ hợp.*

## 1. Sai lầm 1: Nhầm lẫn giữa chỉnh hợp và tổ hợp.

**Bài số 1:** Một tổ có 12 học sinh nữ và 10 học sinh nam. Cần chọn ra 6 học sinh ( 3 nam, 3 nữ) để ghép thành 3 đôi biểu diễn văn nghệ. Hỏi có bao nhiêu cách ghép?

**Lời giải 1:** - Số cách chọn thứ tự 3 nữ trong 12 nữ là  $A_{12}^3$  (cách)  
- Số cách chọn thứ tự 3 nam trong 10 nam là  $A_{10}^3$  (cách)  
- Vậy số cách chọn 3 đôi nam nữ là:  $A_{12}^3 A_{10}^3$  (cách)

**Lời giải 2:** - Số cách chọn 3 nữ trong 12 nữ là  $C_{12}^3$  (cách)  
- Số cách chọn 3 nam trong 10 nam là  $C_{10}^3$  (cách)  
- Vậy số cách chọn 3 đôi nam nữ là:  $C_{12}^3 C_{10}^3$  (cách)

**Lời giải 3:** - Số cách chọn 3 nữ trong 12 nữ là  $C_{12}^3$  (cách)  
- Số cách chọn 3 nam trong 10 nam là  $C_{10}^3$  (cách)  
- Do đó số cách chọn 6 học sinh ( 3 nam, 3 nữ) là:  $C_{12}^3 C_{10}^3$  (cách)  
- Vì một đôi có hai bạn ( 1 nam, 1 nữ) nên chọn ra 1 bạn nam(trong 3 bạn nam) và một bạn nữ( trong 3 bạn nữ) thì có:  $3.3 = 9$ (cách)  
- Vậy số cách chọn thỏa mãn là:  $9 C_{12}^3 C_{10}^3$  (cách)

**Lời giải 4:** - Số cách chọn 3 nữ trong 12 nữ là  $C_{12}^3$  (cách)  
- Số cách chọn 3 nam trong 10 nam là  $C_{10}^3$  (cách)  
- Do đó số cách chọn 6 học sinh ( 3 nam, 3 nữ) là:  $C_{12}^3 C_{10}^3$  (cách)  
- Trong 6 học sinh chọn ra thì có  $3!$  (cách) ghép giữa các đôi này với nhau(là hoán vị của 3 học sinh nam hoặc của 3 học sinh nữ)  
- Vậy số cách chọn thỏa mãn là:  $3! C_{12}^3 C_{10}^3$  (cách)

### ***Đâu là lời giải đúng?***

**Phân tích:** - Lời giải 1: Rõ ràng là sai vì bài toán ko yêu cầu thứ tự  
- Lời giải 2: Thiếu số cách chọn để ghép thành các đôi  
- Lời giải 3: Có vẻ như đúng, tuy nhiên ở bước cuối đã nhầm lẫn việc chọn ra 3 đôi với việc chỉ đơn thuần chọn ra 1 nam và 1 nữ  
- Lời giải 4: Là lời giải đúng.

## 2. Sai lầm 2: “ Các phần tử còn lại tùy ý trong tập còn lại”

Xin nêu ra một bài toán vô cùng đơn giản , nhưng lại có các cách làm như sau:

**Bài số 2:** Một nhóm 5 bạn học sinh A,B,C,D,E. Cần chọn ra 3 bạn thì có bao nhiêu cách chọn?

**Lời giải 1:** Chọn 3 bạn trong 5 bạn là một tổ hợp chập 3 của 5. Số cách chọn là  $C_5^3$  (cách)

**Lời giải 2:** - Đầu tiên chọn 1 bạn thì có  $C_5^1$  (cách)

- Tiếp theo chọn 1 bạn trong 4 bạn còn lại có  $C_4^1$  (cách)

- Cuối cùng chọn 1 bạn còn lại trong 3 bạn thì có  $C_3^1$  (cách)

- Vậy có  $C_5^1 C_4^1 C_3^1$  (cách)

-

**Lời giải 3:** - Đầu tiên chọn 1 bạn thì có  $C_5^1$  (cách)

- Tiếp theo chọn 2 bạn còn lại trong 4 bạn có  $C_4^2$  (cách)

- Vậy có  $C_5^1 C_4^2$  (cách)

**Lời giải 4:** - Đầu tiên chọn 2 bạn thì có  $C_5^2$  (cách)

- Tiếp theo chọn 1 bạn còn lại trong 3 bạn có  $C_3^1$  (cách)

- Vậy có  $C_5^2 C_3^1$  (cách)

### ***Đâu là lời giải đúng?***

**Phân tích:** Lời giải 1: Tất nhiên là lời giải đúng

Vậy sai lầm là gì khiến các lời giải còn lại đều sai?

Xin phân tích cái sai của lời giải 2:

Đầu tiên chọn 1 bạn trong 5 bạn, dĩ nhiên là có 5 cách rồi

+ Nếu lần đầu chọn A ( còn lại B,C,D,E), lần 2 chọn B( còn lại C,D,E), lần 3 chọn C thì ta có 3 bạn là A,B,C

+ Nếu lần đầu chọn B ( còn lại A,C,D,E), lần 2 chọn C( còn lại A,D,E), lần 3 chọn A thì ta lại có 3 bạn là A,B,C

.....  
Như vậy số cách chọn ra 3 bạn A,B,C đã bị lặp

Các lời giải còn lại giải thích tương tự. OK?

**Bài số 3:** Một lớp có 30 HS nam, 15 HS nữ. Chọn ra một nhóm gồm 6 HS sao cho có ít nhất 2 nữ thì có bao nhiêu cách chọn?

**Lời giải 1 (trực tiếp): Chia cụ thể các trường hợp:**

- TH1: 2 nữ, 4 nam:  $C_{15}^2 C_{30}^4$  (cách)
- TH2: 3 nữ, 3 nam:  $C_{15}^3 C_{30}^3$  (cách)
- TH3: 4 nữ, 2 nam:  $C_{15}^4 C_{30}^2$  (cách)
- TH4: 5 nữ, 1 nam:  $C_{15}^5 C_{30}^1$  (cách)
- TH5: 6 nữ:  $C_{15}^6$  (cách)

Vậy có tất cả.....( cộng 5 TH lại)

**Lời giải 2 (gián tiếp)**

- Bước 1: Chọn 6 HS bất kỳ:  $C_{45}^6$  (cách)
- Bước 2: Chọn 5 HS nam, 1 HS nữ:  $C_{30}^5 C_{15}^1$  (cách)
- Bước 3: Chọn 6 HS nam:  $C_{30}^6$
- vậy số cách chọn thoả mãn là:  $C_{45}^6 - (C_{30}^5 C_{15}^1 + C_{30}^6)$  (cách)

**Lời giải 3 ( Có vẻ “hay” vì... rất ngắn và... “độc đáo”)**

- Bước 1: Chọn ra 2 nữ ( vì có ít nhất là 2 nữ) có:  $C_{15}^2$  (cách)
- Bước 2: Chọn 4 bạn còn lại trong 43 bạn có:  $C_{43}^4$  (cách)  
( Khi đó 6 bạn được chọn luôn thoả mãn có ít nhất 2 nữ)
- Vậy có  $C_{15}^2 C_{43}^4$  (cách)

***Đâu là lời giải đúng?***

**Phân tích:** ( Xin dành cho độc giả, OK?)

**3. Sai lầm 3: Xét thiếu các trường hợp trong bài toán giải bằng phương pháp gián tiếp.**

**Bài số 4:** Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra ?

**Giải**

- + Loại 1: chọn 10 câu tùy ý trong 20 câu có  $C_{20}^{10}$  cách.
- + Loại 2: chọn 10 câu ko thoả mãn đầu bài( có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó).
- Trường hợp 1: chọn 10 câu dễ và trung bình trong 16 câu có  $C_{16}^{10}$  cách.
- Trường hợp 2: chọn 10 câu dễ và khó trong 13 câu có  $C_{13}^{10}$  cách.
- Trường hợp 3: chọn 10 câu trung bình và khó trong 11 câu có  $C_{11}^{10}$  cách.

Vậy có  $C_{20}^{10} - (C_{16}^{10} + C_{13}^{10} + C_{11}^{10}) = 176451$  đề kiểm tra.

Tất nhiên lời giải trên là một lời giải đúng. Tuy nhiên tôi muốn chúng ta bàn luận các sai lầm trong bài dưới đây :

**Bài số 5 :** Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó người ta chọn ra 7 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra ?

*Chú ý rằng so với bài số 4 thì bài số 5 chỉ thay đổi một chút là thay vì chọn ra 10 câu thì chọn ra 7 câu. Nghe qua thì có vẻ cách làm chẳng có gì khác, tuy nhiên sự thay đổi đó có thể gây sai lầm. Hãy xem các lời giải sau :*

### **Lời giải 1 :**

- + Loại 1: chọn 7 câu tùy ý trong 20 câu có  $C_{20}^7$  cách.
  - + Loại 2: chọn 7 câu không thỏa yêu cầu.
    - Trường hợp 1: chọn 7 câu dễ trong 9 câu có  $C_9^7$  cách.
    - Trường hợp 2: chọn 7 câu trung bình có 1 cách.
    - Trường hợp 3: chọn 7 câu dễ và trung bình trong 16 câu có  $C_{16}^7$  cách.
    - Trường hợp 4: chọn 7 câu dễ và khó trong 13 câu có  $C_{13}^7$  cách.
    - Trường hợp 5: chọn 7 câu trung bình và khó trong 11 câu có  $C_{11}^7$  cách.
- Vậy có  $C_{20}^7 - (1 + C_9^7 + C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7) = 63997$  đề kiểm tra!

### **Lời giải 2 :**

- + Loại 1: chọn 7 câu tùy ý trong 20 câu có  $C_{20}^7$  cách.
  - + Loại 2: chọn 7 câu không thỏa yêu cầu.
    - Trường hợp 1: chọn 7 câu dễ và trung bình trong 16 câu có  $C_{16}^7$  cách.
    - Trường hợp 2: chọn 7 câu dễ và khó trong 13 câu có  $C_{13}^7$  cách.
    - Trường hợp 3: chọn 7 câu trung bình và khó trong 11 câu có  $C_{11}^7$  cách.
- Vậy có  $C_{20}^7 - (C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7) = 64034$  đề kiểm tra.

### **Lời giải 3 :**

- + Loại 1: chọn 7 câu tùy ý trong 20 câu có  $C_{20}^7$  cách.
- + Loại 2: chọn 7 câu không thỏa yêu cầu.
  - Trường hợp 1: 7 câu chọn ra chỉ có 1 loại :  $C_9^7 + C_7^7$  ( là một loại dễ hoặc trung bình)
  - Trường hợp 2: 7 câu chọn ra có đủ hai loại :
    - \* Dễ và trung bình :  $C_{16}^7 - (C_9^7 + C_7^7)$  ( trong 16 câu dễ và TB thì khi chọn ra 7 câu thì 7 câu đó hoặc thuộc cả 2 loại hoặc chỉ thuộc một loại)
    - \* Dễ và khó :  $C_{13}^7 - C_9^7$
    - \* Trung bình và khó :  $C_{11}^7 - C_7^7$

Vậy có  $C_{20}^7 - (C_{16}^7 + C_{13}^7 - C_9^7 + C_{11}^7 - 1) = 64071$  đề kiểm tra.

***Đâu là lời giải đúng?***