

**Gottfried Wilhelm Von Leibniz**

Gottfried Wilhelm von Leibniz nació en Leipzig el 21 de junio (1 de julio) de 1646. En 1661 entró a la Universidad de Leipzig como estudiante de filosofía y leyes, en 1666 recibió el grado de doctor en Derecho en Altdorf. Al año siguiente, conoció al diplomático Baron von Boineburg, por cuya sugerencia entró al servicio diplomático del Elector de Mainz. Del año 1672 trabajó como representante diplomático de Mainz ante la corte de Luis XIV. Durante este periodo tuvo la oportunidad de visitar Londres, donde conoció a los más eruditos matemáticos, científicos y teólogos ingleses de ese momento. En 1676 aceptó el puesto de bibliotecario, archivista y consejero de la corte ante el Duque de Brunswick. El resto de su vida lo pasó en Hanover, excepción hecha de un breve intervalo durante el cual viajó a Roma y Viena con el propósito de consultar documentos relativos a la historia de la casa de Brunswick. Murió en Hanover el 14 de noviembre de 1716.

Como matemático, Leibniz tiene el honor de haber inventado, junto con Newton (en 1675), el cálculo diferencial. Como científico, apreció y promovió el uso de la observación y la experimentación: "Prefiero —dijo— a un Leeuwenhoek que me dice lo que ve que a un Descartes que me dice lo que piensa". Como historiador, enfatizó la importancia del estudio de documentos y archivos.



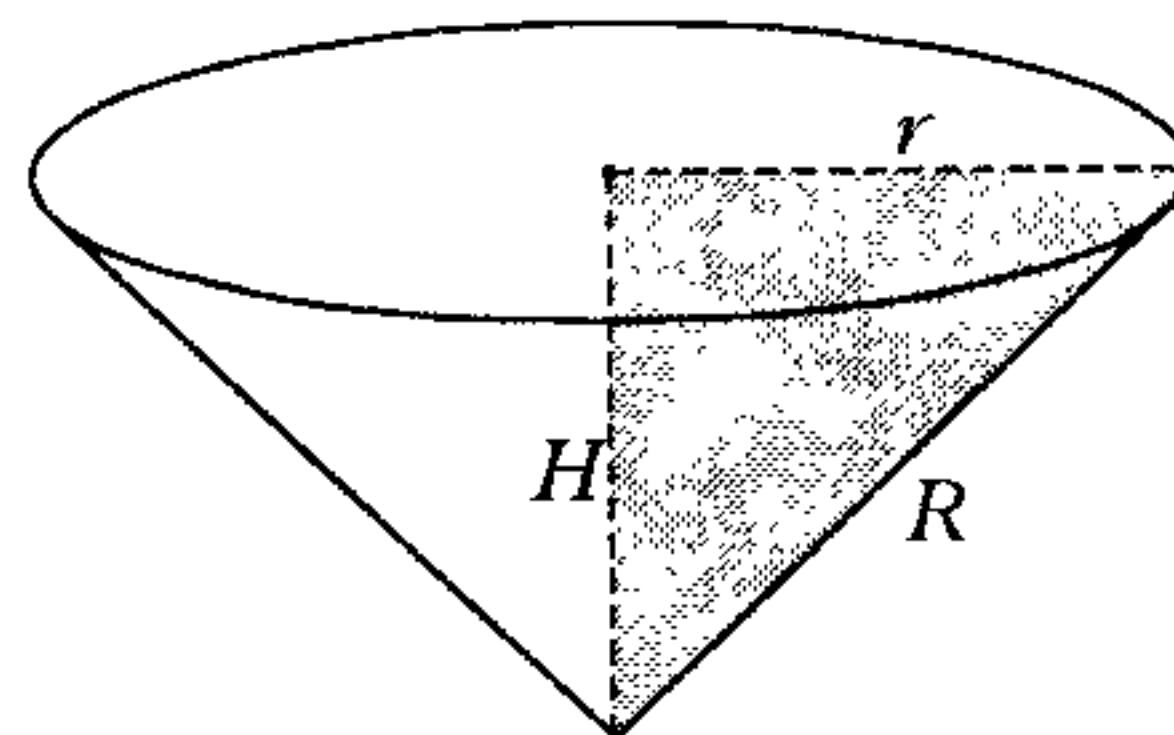
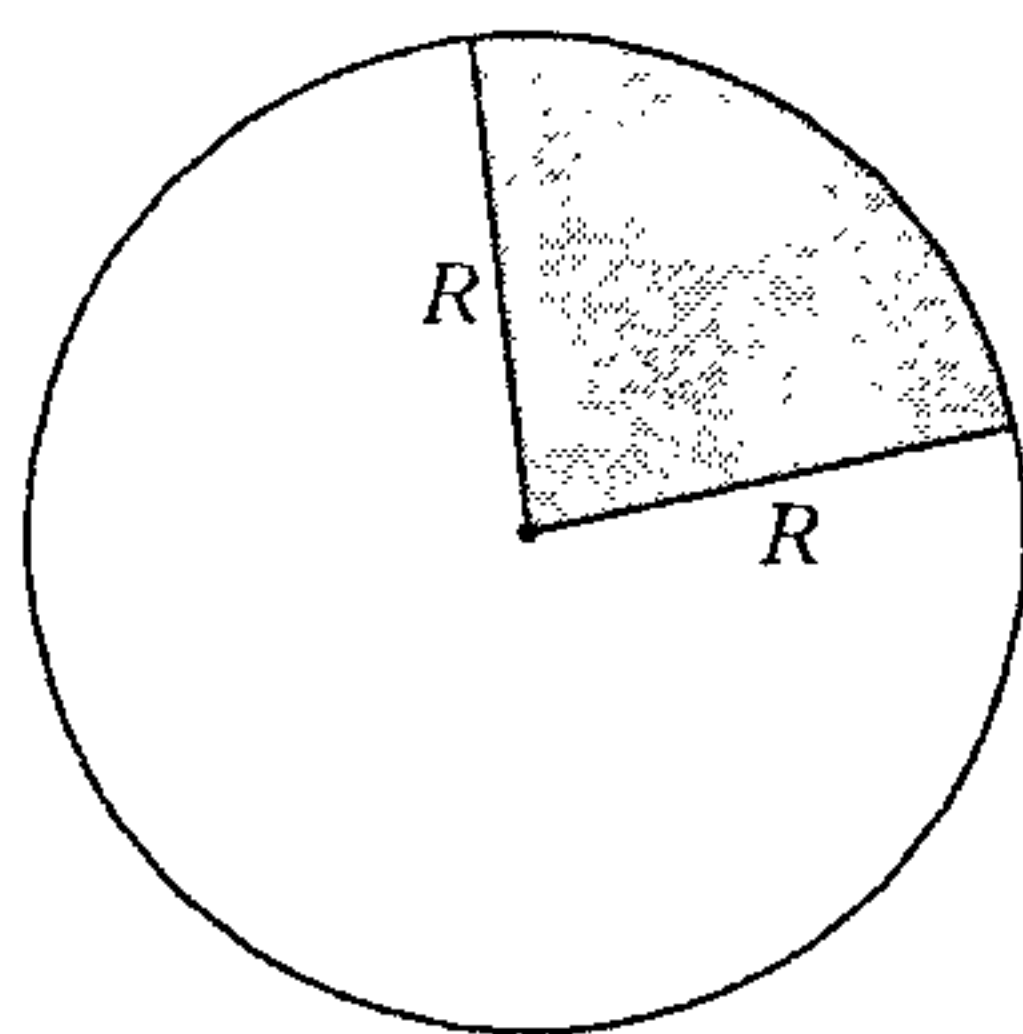
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

### El embudo de mayor capacidad

Se quiere construir la parte cónica de un embudo valiéndonos de un círculo de hojalata. Para ello se corta un sector en dicho círculo y, con el resto, se construye el cono (Figura 1). ¿Cuántos grados debe tener el arco del sector que se ha cortado para que el embudo alcance la mayor capacidad posible?

La longitud del arco de aquella parte que se aprovecha para el cono se representa con  $x$ . Por lo tanto, la generatriz será el radio,  $R$ , del círculo de hojalata, y la circunferencia de la base será igual a  $x$ . El radio  $r$  de la base del cono se determinará por la igualdad:

$$2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$



$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

El volumen del cono equivale a:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3} \left( \frac{x}{2\pi} \right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3} \underbrace{\sqrt{\frac{R^2 x^4}{(2\pi)^4} - \frac{x^6}{(2\pi)^6}}}_{y'}$$

Para que el volumen  $V$  sea máximo entonces  $y$  tiene que ser máximo, por lo tanto aplicamos primera derivada igual a cero:  $y' = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{4R^2 x^3}{(2\pi)^4} - \frac{6x^5}{(2\pi)^6} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2(2\pi)^2 R^2}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} R \approx 5,15 R$$

El arco  $x$  tiene alrededor de  $295^\circ$  y, en consecuencia, el arco del sector cortado equivaldría aproximadamente a  $65$  grados.



# Derivadas

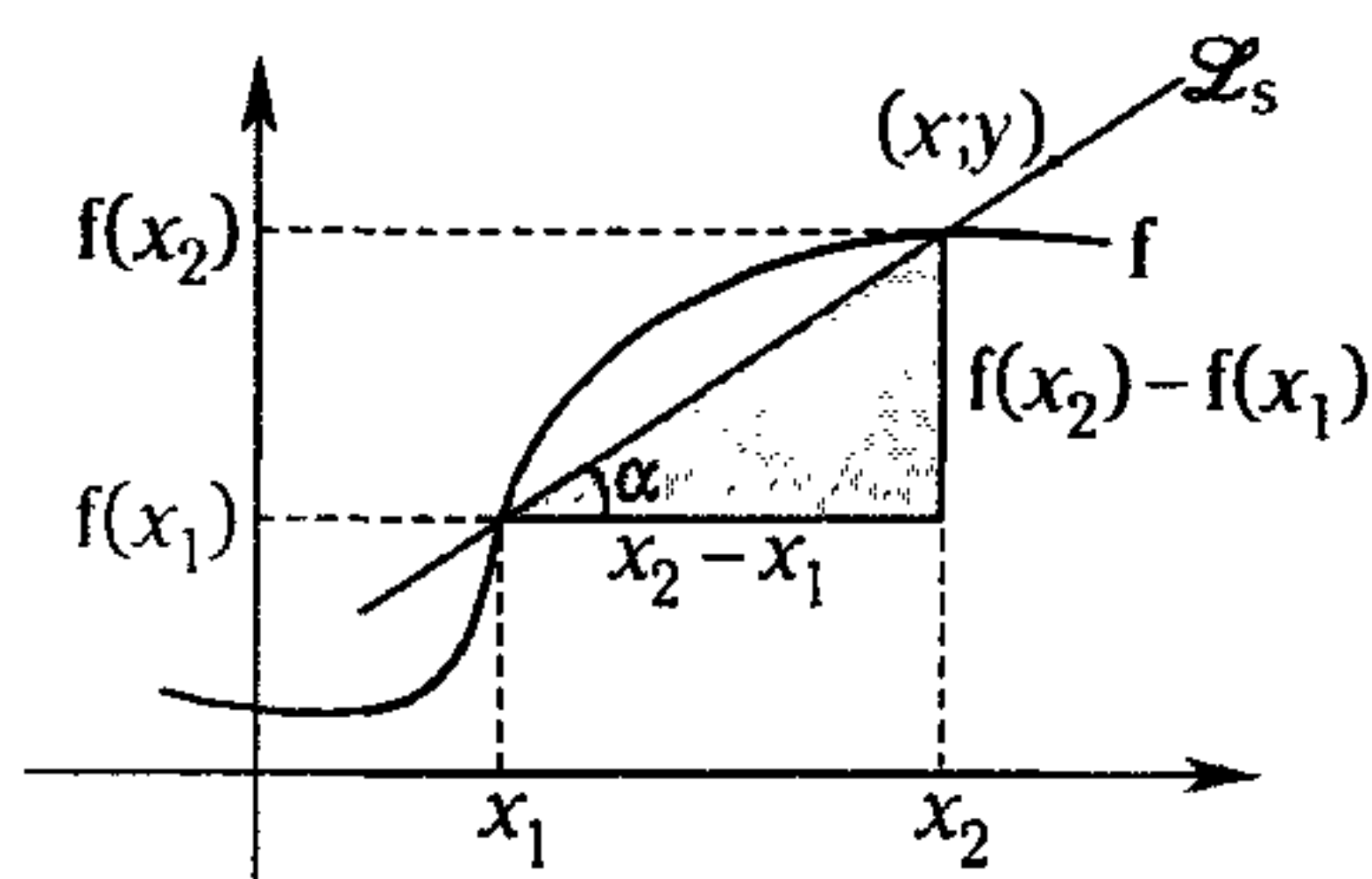
## OBJETIVOS

- Definir e interpretar la derivada.
- Conocer la diversidad de aplicaciones que tiene la derivada
- Comprender los diferenciales.

## INTRODUCCIÓN

### RECTA SECANTE A UNA CURVA

Consideremos una función  $f(x)$ , representada por la gráfica.



que corta a la gráfica en los puntos de abscisa  $x_1$ ,  $x_2$ .

Del gráfico vemos que su pendiente es:

$$m_s = \tan \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

La ecuación se halla tomando cualquier punto  $(x; y)$  en la recta.

Por definición de pendiente:

$$m_s = \frac{y - f(x_1)}{x - x_1} \Rightarrow y = f(x_1) + m_s(x - x_1)$$

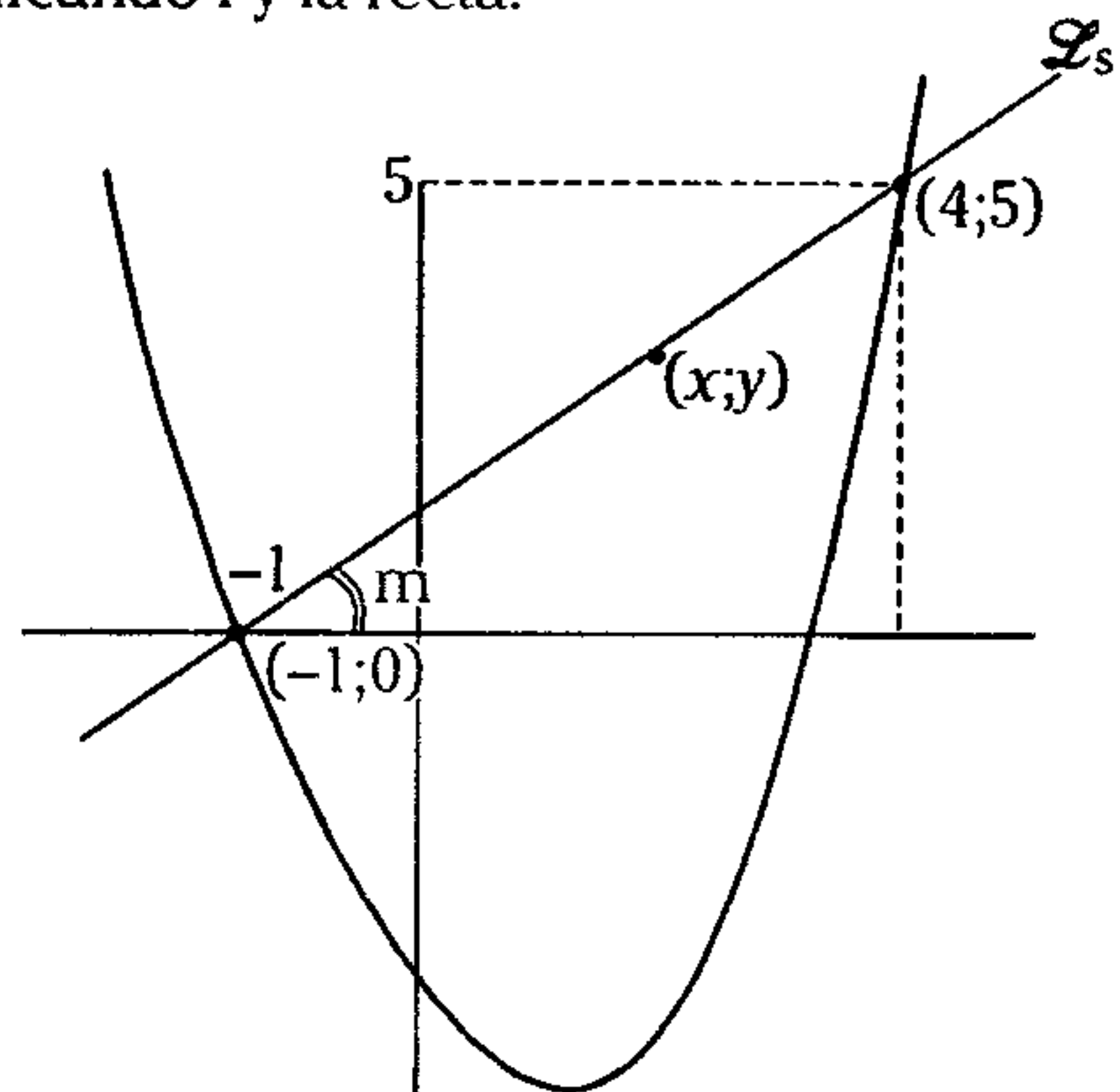
$$\Rightarrow \mathcal{L}_s: y = m_s x + f(x_1) - m_s x_1$$

### Ejemplo

Halle la ecuación de la recta secante a la gráfica de  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ , que corta en los puntos de abscisa  $-1$ ;  $4$ .

### Resolución:

Graficando  $f$  y la recta.



Hallando su pendiente:

$$m_s = \frac{5 - 0}{4 - (-1)} = 1$$

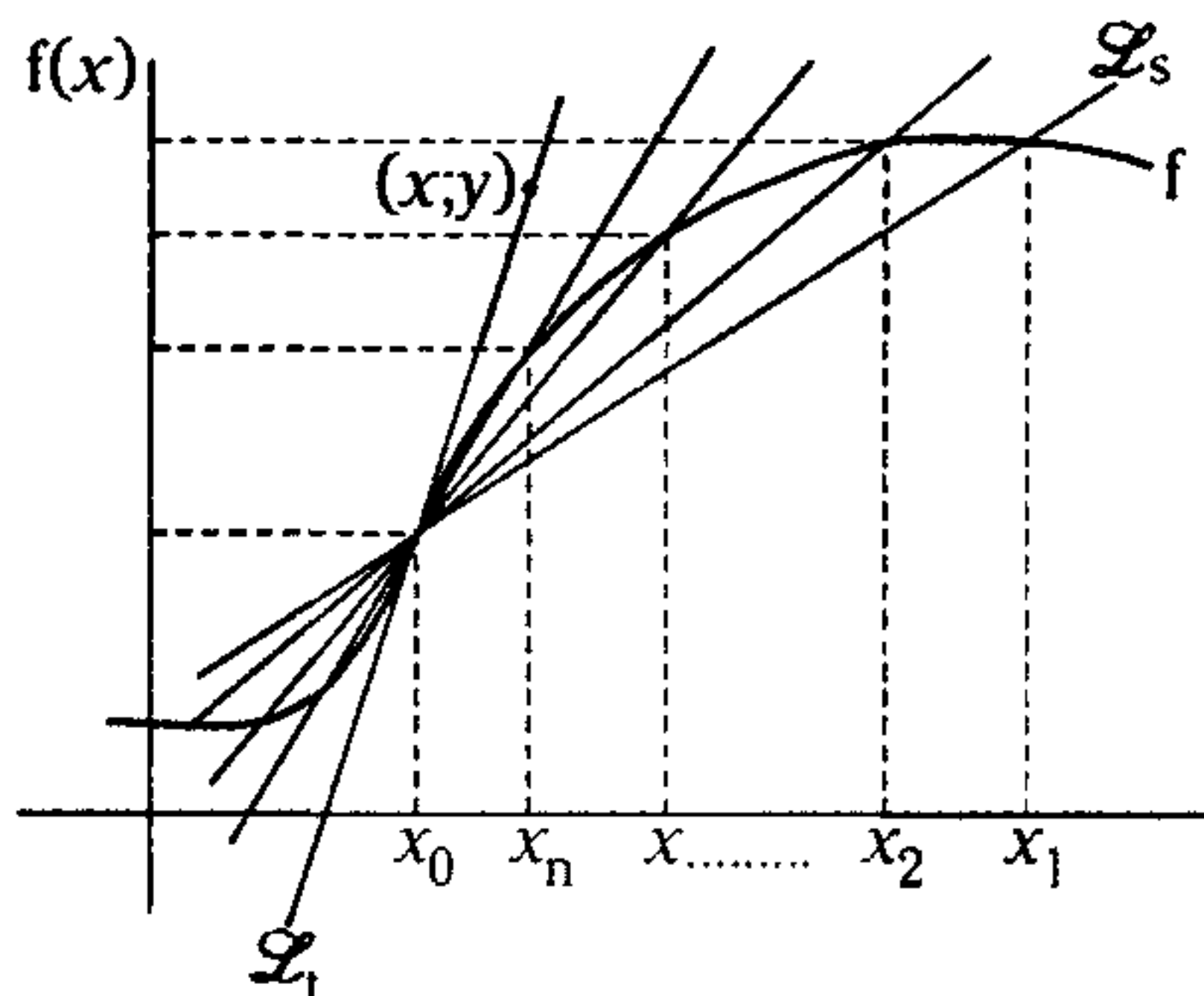
Por definición de pendiente:

$$m_s = \frac{y-0}{x-(-1)} = 1 \Rightarrow y = x + 1$$

$\therefore$  la recta secante en los puntos mencionados es  $y = x + 1$ .

### RECTA TANGENTE A UNA CURVA

Consideremos la función  $f(x)$  representada gráficamente por:



$$m_s = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Cuando  $x_1$  se aproxima a  $x_0$ , la pendiente de la recta secante se aproximará a la pendiente de la recta tangente.

$$m_t = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente tomando cualquier punto  $(x; y)$  de la recta:

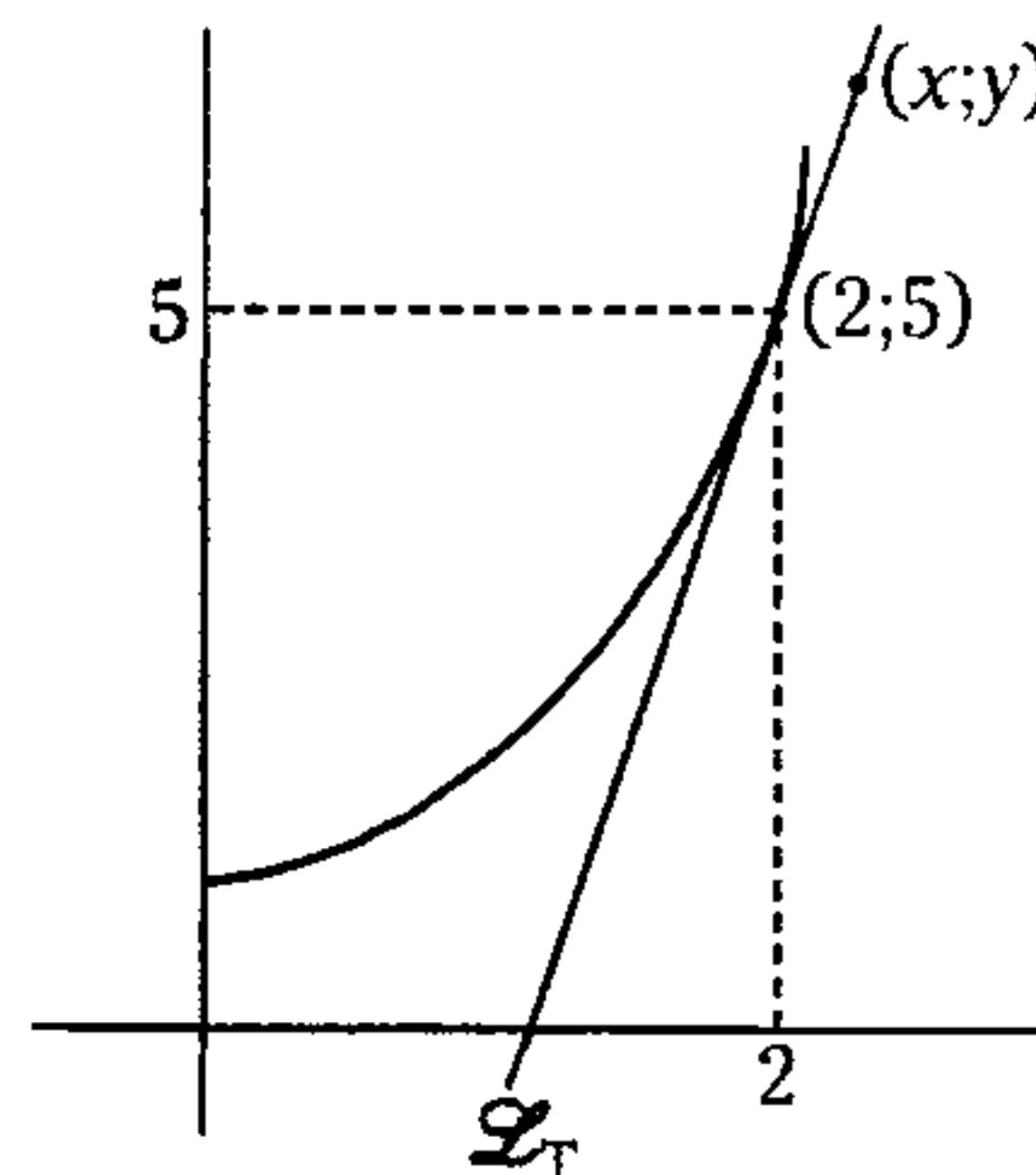
$$m_t = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow y = m_t x + f(x_0) - m_t x_0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_t : y = m_t x + f(x_0) - m_t x_0$$

### Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = x^2 + 1$  en el punto de abscisa 2.

Resolución:



Hallemos su pendiente en  $x_0 = 2$

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{x_1 \rightarrow 2} \frac{f(x_1) - f(2)}{x_1 - 2} = \lim_{x_1 \rightarrow 2} \frac{(x_1^2 + 1) - (2^2 + 1)}{x_1 - 2} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow 2} \frac{x_1^2 - 4}{x_1 - 2} = \lim_{x_1 \rightarrow 2} \frac{(x_1 + 2)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m_t = 2 + 2 = 4$$

Por definición de pendiente

$$m_t = 4 = \frac{y - 5}{x - 2} \Rightarrow y - 5 = 4x - 8$$

$$\therefore \mathcal{L}_t : y = 4x - 3$$

La idea de la derivada está relacionada directamente con la pendiente de la recta tangente a la curva (gráfica de  $f$ ) en un punto de dominio.

Se llama **diferencias** a los incrementos positivos o negativos que toma una función o una variable independiente y se asignan con la letra  $\Delta$ . Así, por ejemplo, tenemos  $y = f(x) = x^3$ . Incrementando  $x$ , la función será:

$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

El incremento sufrido por la función cuando la variable ha aumentado su valor en  $\Delta x$  es:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

Luego, el cociente de los dos incrementos se llama **cociente incremental** y es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Llamando  $x = x_0 + \Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

# DERIVADA

## DEFINICIÓN

Sea la función  $y=f(x)$  uniforme y continua en el intervalo  $<a; b>$  y  $x_0 \in <a; b>$ , se llama derivada de la función  $y=f(x)$  en el punto  $x_0$  al límite (si existe) del **cociente incremental** cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  ( $x \in \text{Dom } f$ ).

En este caso se dice que  $y=f(x)$  es derivable o diferenciable en  $x_0$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se designa con la notación  $f'(x_0)$ , notación de Lagrange; Cauchy la denota por D delante de la característica así:  $D f(x)$ ; hay además la notación de Leibnitz que la escribe en la forma  $\frac{dy}{dx}$  y también se designará algunas veces por  $y'$ .

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} ; x_0 \in \text{Dom } f$$

Sea  $x = x_0 + \Delta x \wedge \Delta x = h$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

## Ejemplo 1

Halle la derivada de  $f(x)=2x^3$  en el punto  $x_0$ ,  $x_0 \in \text{Dom } f$

**Resolución:**

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x_0 + h)^3 - 2x_0^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3) - 2x_0^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6x_0^2 + 3x_0h + h^2 = 6x_0^2 \\ \therefore f'(x_0) &= 6x_0^2 \end{aligned}$$

## Ejemplo 2

Halle la derivada de  $f(x)=\text{sen } x$  en  $x = x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$

**Resolución:**

Por definición

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x_0 + h) - \text{sen } x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x_0 \cosh + \cos x_0 \text{sen } h - \text{sen } x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x_0 (\cosh - 1) + \cos x_0 \left( \frac{\text{sen } h}{h} \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen } x_0 \frac{\text{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} \cdot \frac{h}{4} + \cos x_0 \left( \frac{\text{sen } h}{h} \right) = \cos x_0 \end{aligned}$$

## Ejemplo 3

Halle la derivada de la función  $f(x)=\ln x$  en  $x_0$ ;  $x_0 \in \mathbb{R}^+$

**Resolución:**

De la definición:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left( \frac{x_0 + h}{x_0} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \ln \left( 1 + \frac{h}{x_0} \right) \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left[ \left( 1 + \frac{h}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{h}} \right]^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \\ \therefore f'(x_0) &= \frac{1}{x_0} ; x_0 > 0 \end{aligned}$$

## Definición

Se dice que una función es diferenciable en todo intervalo I, si  $f'(x_0)$  existe para todo  $x_0 \in I$ , en tal caso  $f'(x_0)$  se llama la derivada de  $f(x)$  en el punto  $x_0 \in I$ .

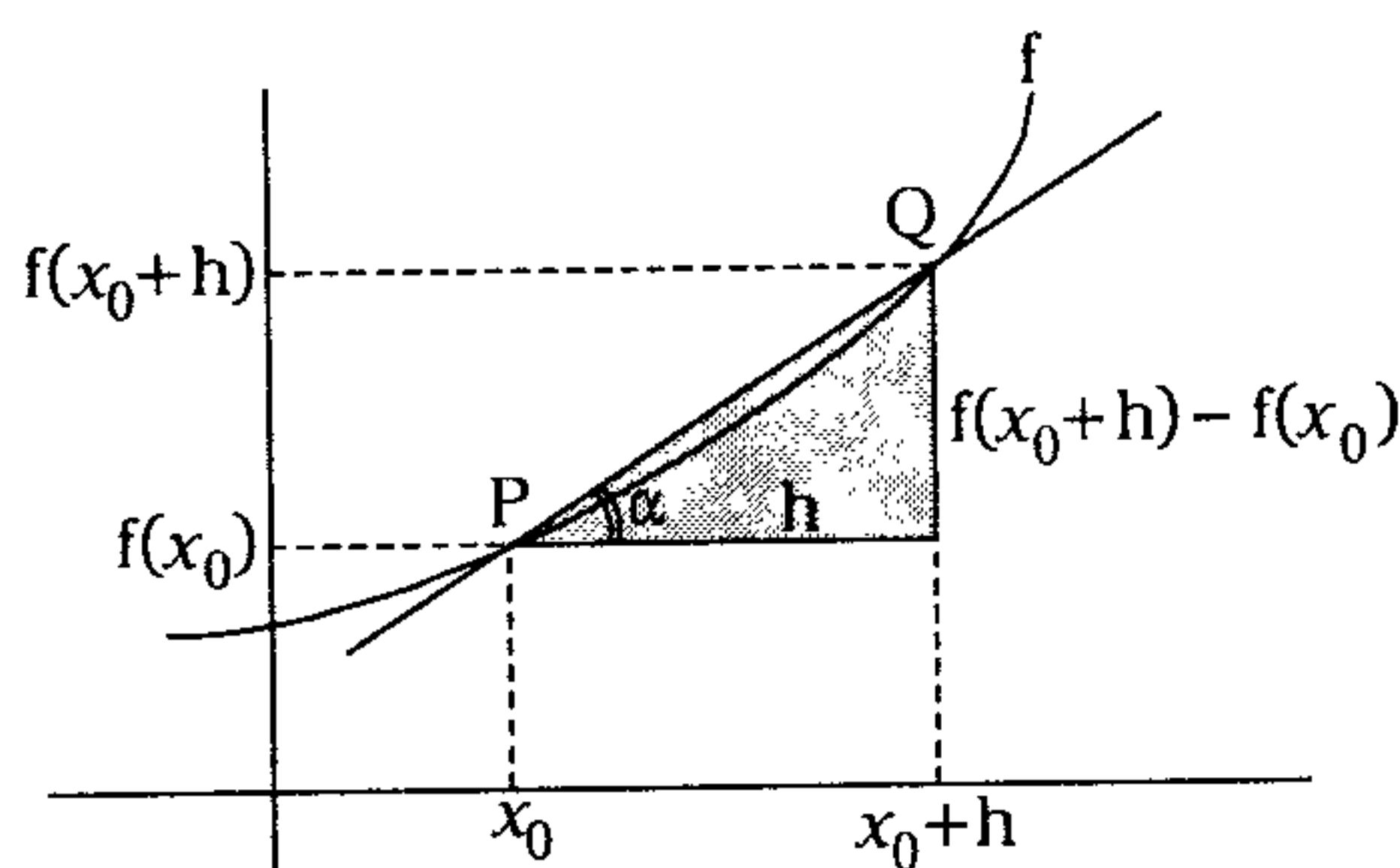


## FUNCIÓN DERIVADA

Cuando una función  $y=f(x)$ , definida en el intervalo  $<a; b>$  tiene derivada en todos los puntos de  $<a; b>$ , es decir, que para cada punto  $x_0$ , tal que  $x_0 \in <a; b>$  existe el límite del **cociente incremental** la correspondencia que existe entre los puntos de  $<a; b>$  y los valores de la derivada de  $y=f(x)$  en cada uno de ellos recibe el nombre de **función derivada**, conocida ésta, basta sustituir  $x$  por  $x_0$  para tener la derivada en el punto  $x_0$ .

## INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Consideremos la función  $f(x)$  cuyo gráfico es:



Del gráfico  $\tan \alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Tomando límite cuando  $h$  tiende a cero.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Entonces,  $f'(x_0)$  representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x)$  en el punto  $x_0$ .

### TEOREMA

El valor de la derivada de  $f$  en cualquier punto  $x \in \text{Dom } f$ , es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva  $y=f(x)$  en cualquier punto  $(x; f(x))$

### Ejemplo:

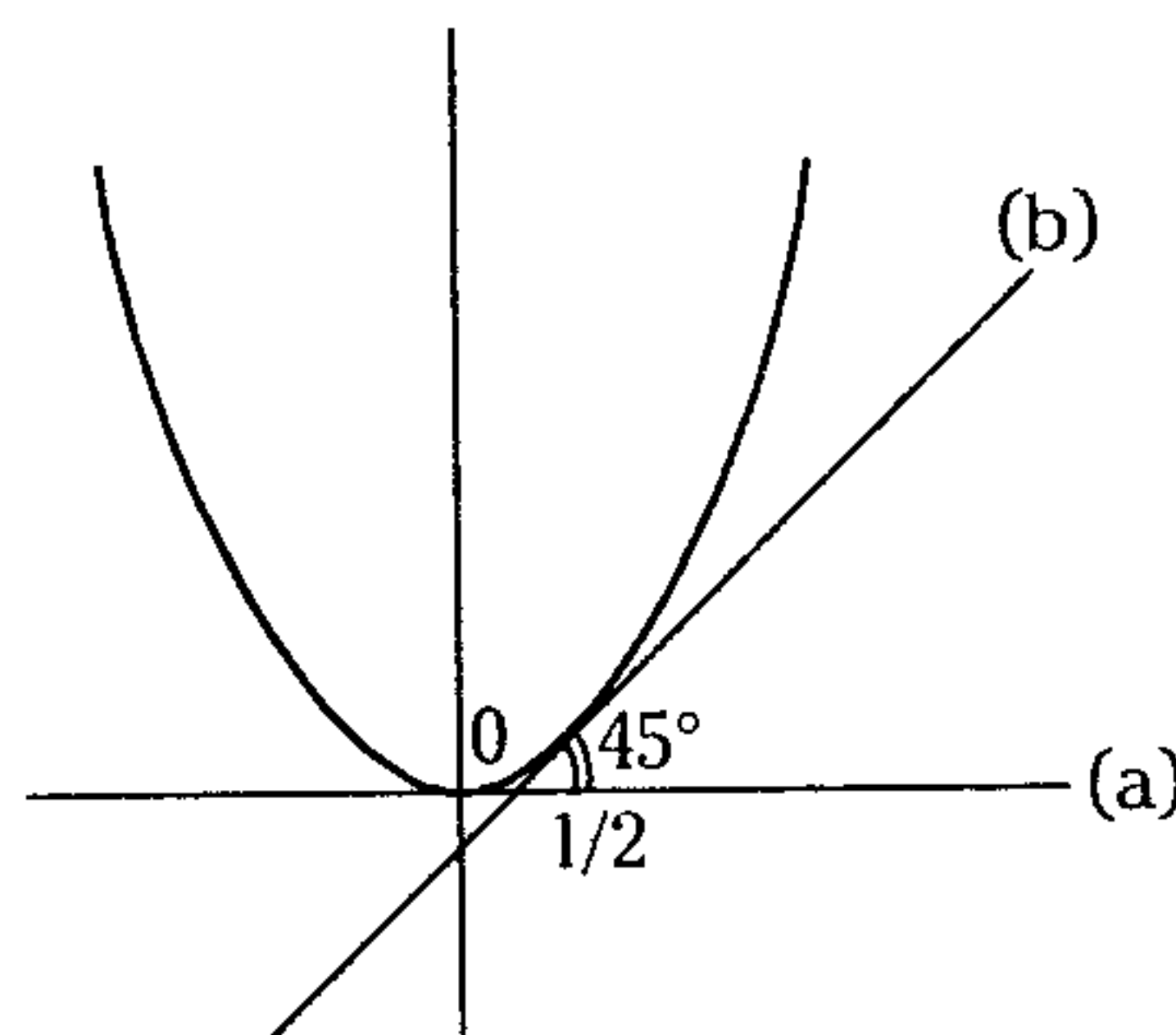
Hallar la pendiente de la recta tangente a la parábola  $y=x^2$ .

- En el vértice.
- En el punto de abscisa  $x=1/2$

### Resolución:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (\text{usando la definición})$$

- La pendiente en  $x=0$  es  $2(0)=0$
- La pendiente en  $x=\frac{1}{2}$  es  $2\left(\frac{1}{2}\right)=1$



### Ejercicio para el lector

Aplicando las derivadas halle las pendientes y la inclinación de la tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto cuya abscisa se indica:

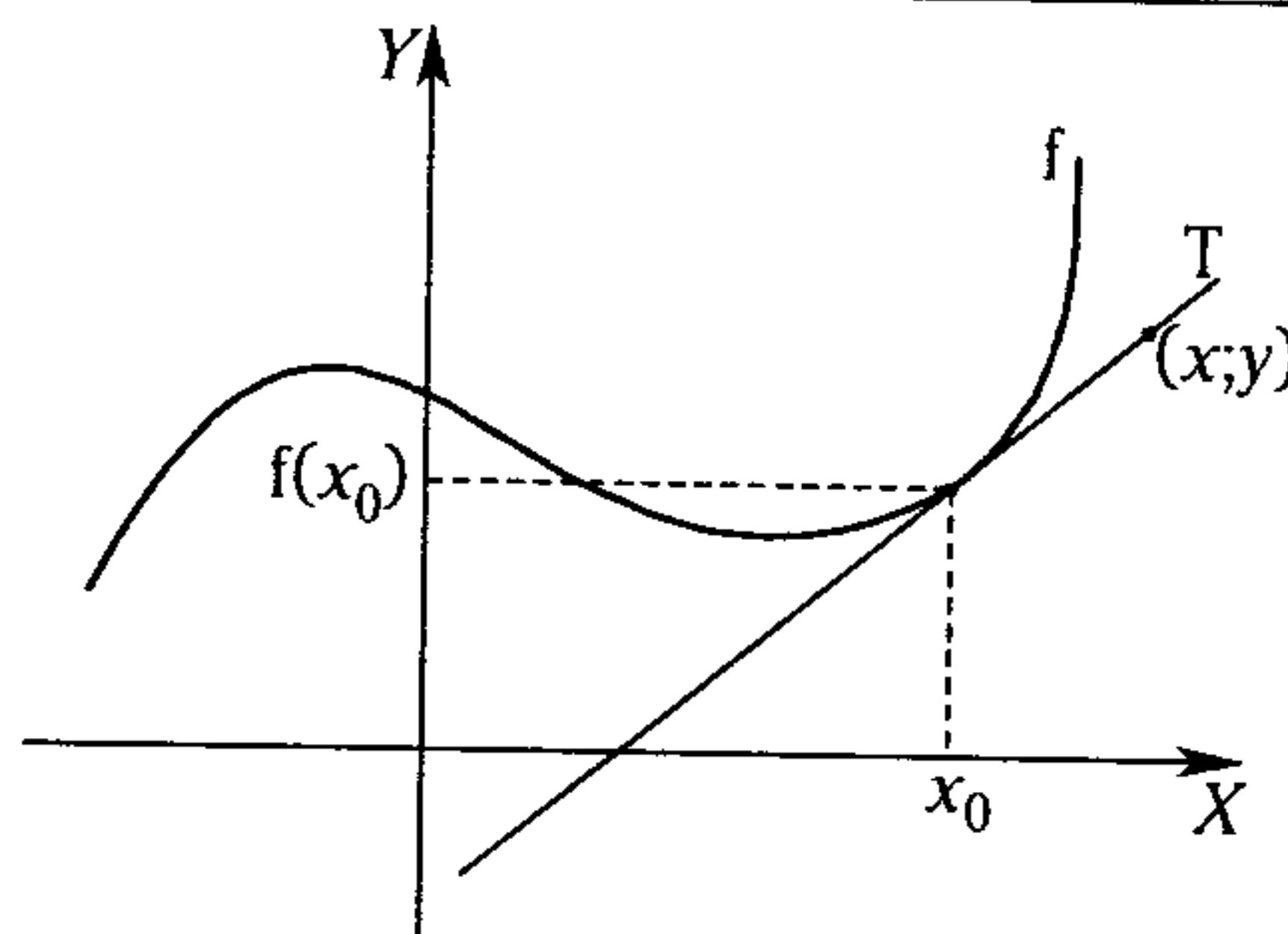
- $y = x^2 - 2$  ;  $x = 1$
- $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$  ;  $x = 3$
- $y = 3 + 3x - x^3$  ;  $x = -1$
- $y = x^3 - 3x^2$  ;  $x = 1$

**RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN EL PUNTO  $x_0$** 

Dada la función  $y=f(x)$ , se llama recta tangente a la curva  $y=f(x)$  en  $x_0$  o tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(x_0; f(x_0))$  a la recta  $T$  que cumple las siguientes condiciones:

- I.  $T$  pasa por  $(x_0; f(x_0))$
- II.  $T$  tiene pendiente  $f'(x_0)$ , es decir,  $T$  es la recta cuya ecuación es:

$$T: \frac{y-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0); x \in \text{Dom } f$$



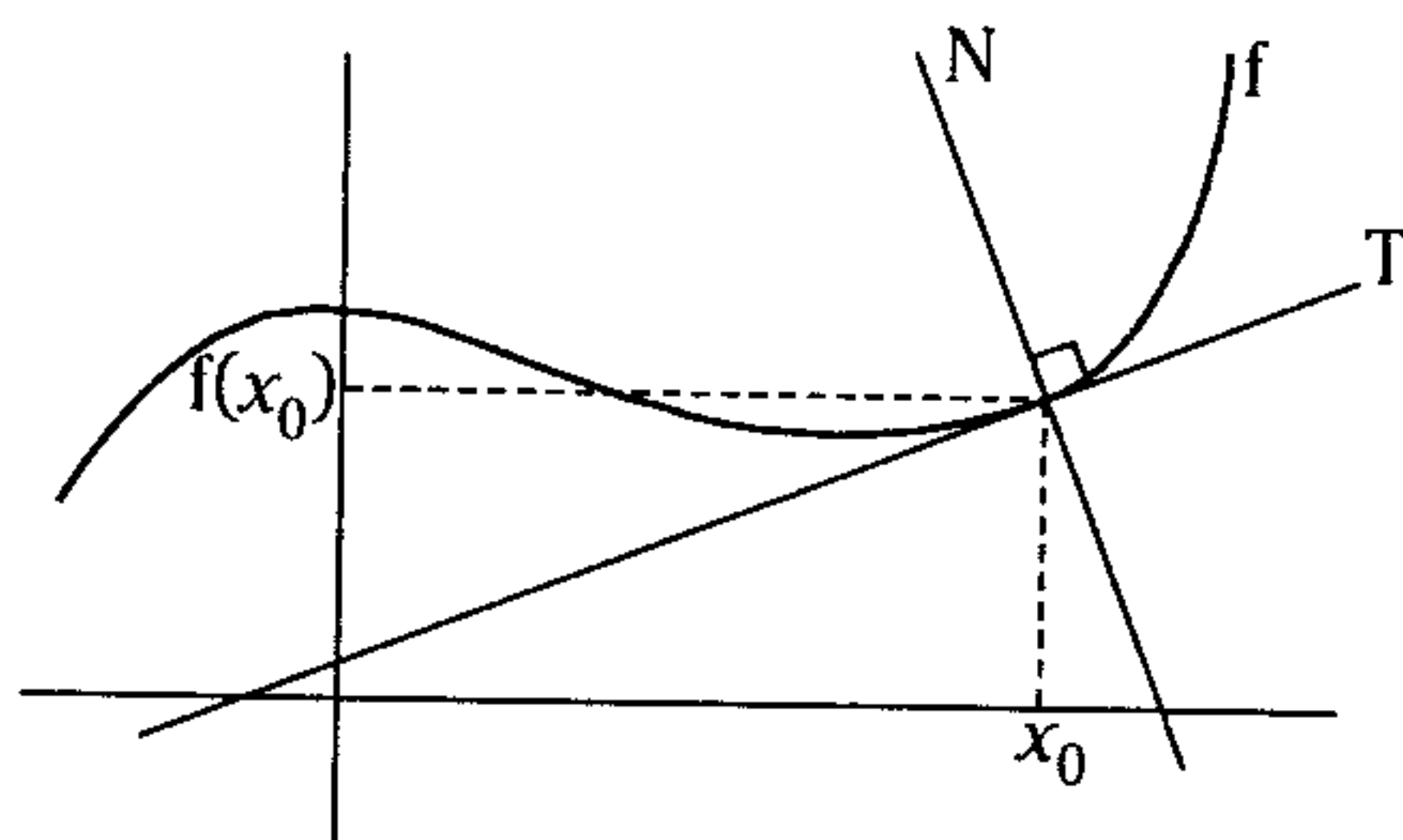
$$T: f'(x_0) = \frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$$

**RECTA NORMAL A UNA CURVA EN EL PUNTO  $x_0$** 

Se llama recta normal a la curva  $y=f(x)$  en  $x_0$  a la recta  $N$  que cumple las siguientes condiciones:

- I.  $N$  pasa por  $(x_0; f(x_0))$
- II.  $N$  es perpendicular a la recta tangente a la curva en  $(x_0; f(x_0))$ , es decir,  $N$  tiene pendiente  $-\frac{1}{f'(x_0)}$ , es decir,  $N$  es la recta cuya ecuación es:

$$N: \frac{y-f(x_0)}{x-x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

**Ejemplo:**

Hallar la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la parábola:

$f(x) = 4x^2 - 7x + 3$ , en el punto  $P$  donde la pendiente de la normal es  $\frac{3}{5}$ .

**Resolución:**

Hallando la derivada de  $f$  en  $x_0$ .

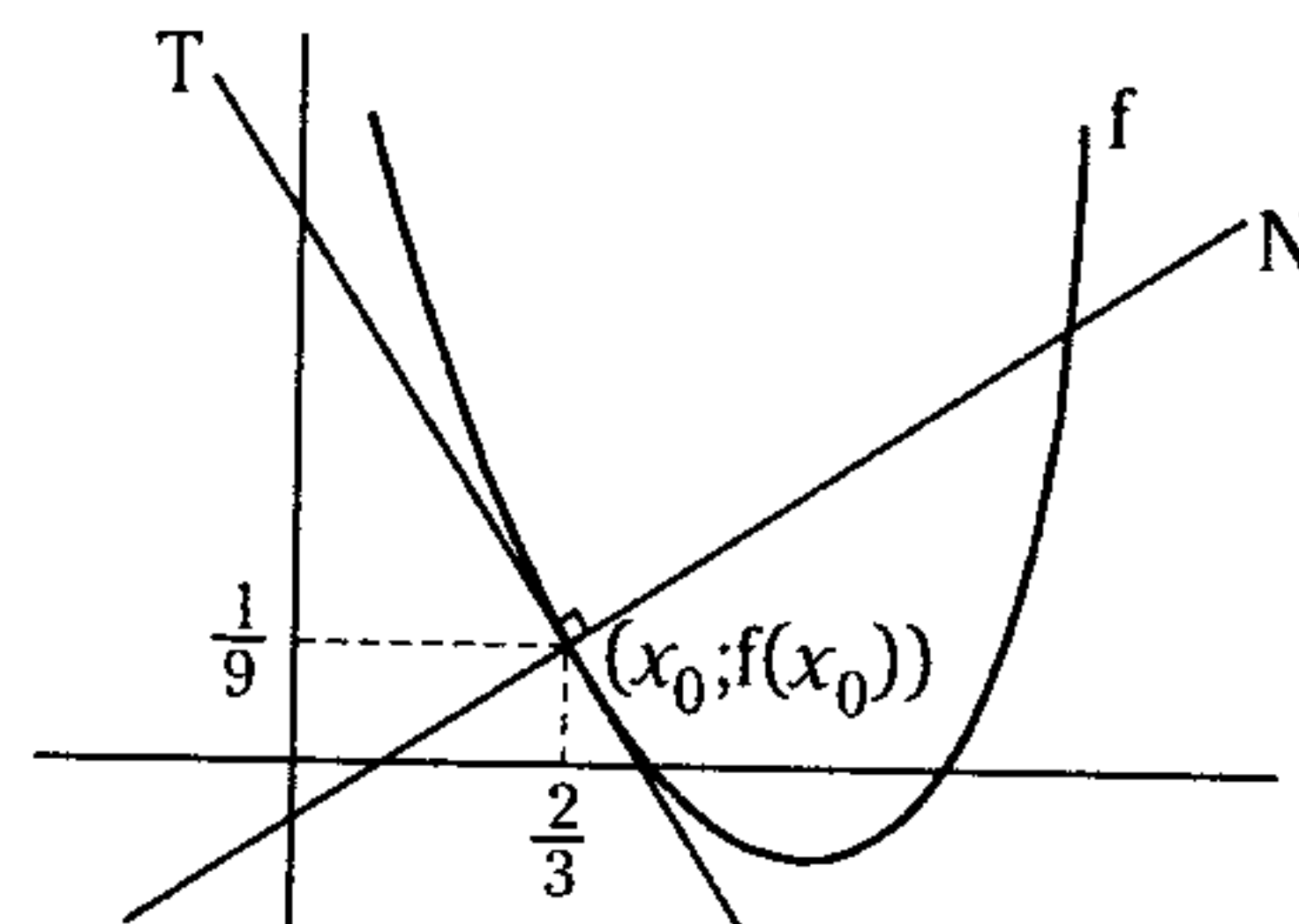
$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4(x_0+h)^2 - 7(x_0+h) + 3] - [4x_0^2 - 7x_0 + 3]}{h} \end{aligned}$$

Simplificando  $f'(x_0) = 8x_0 - 7$

Usando la pendiente de la recta normal.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{f'(x_0)} &= \frac{3}{5} \quad (\text{por dato}) \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{5}{3} \\ \Rightarrow -\frac{1}{8x_0-7} &= \frac{3}{5} \Rightarrow x_0 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Graficando



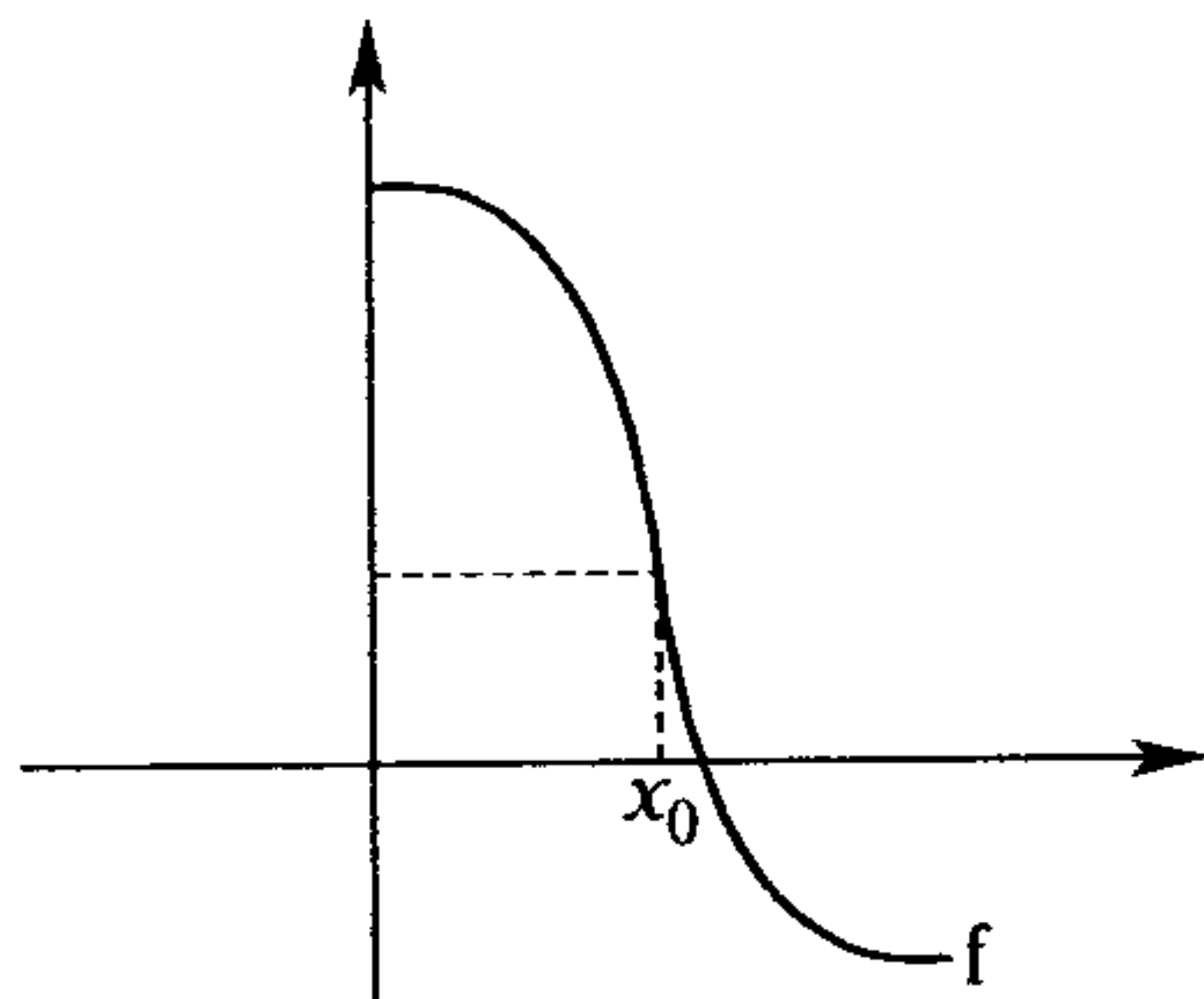
$$T: f'(x_0) = \frac{y-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow -\frac{5}{3} = \frac{y-1/9}{x-2/3}$$

$$N: -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{y-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{y-1/9}{x-2/3}$$

$$\text{De donde: } T: y = -\frac{5}{3}x + \frac{11}{9}; \quad N: y = \frac{3x}{5} - \frac{13}{45}$$

## CASOS ESPECIALES DONDE EXISTE LA RECTA TANGENTE Y NO EXISTE LA DERIVADA EN ESE PUNTO

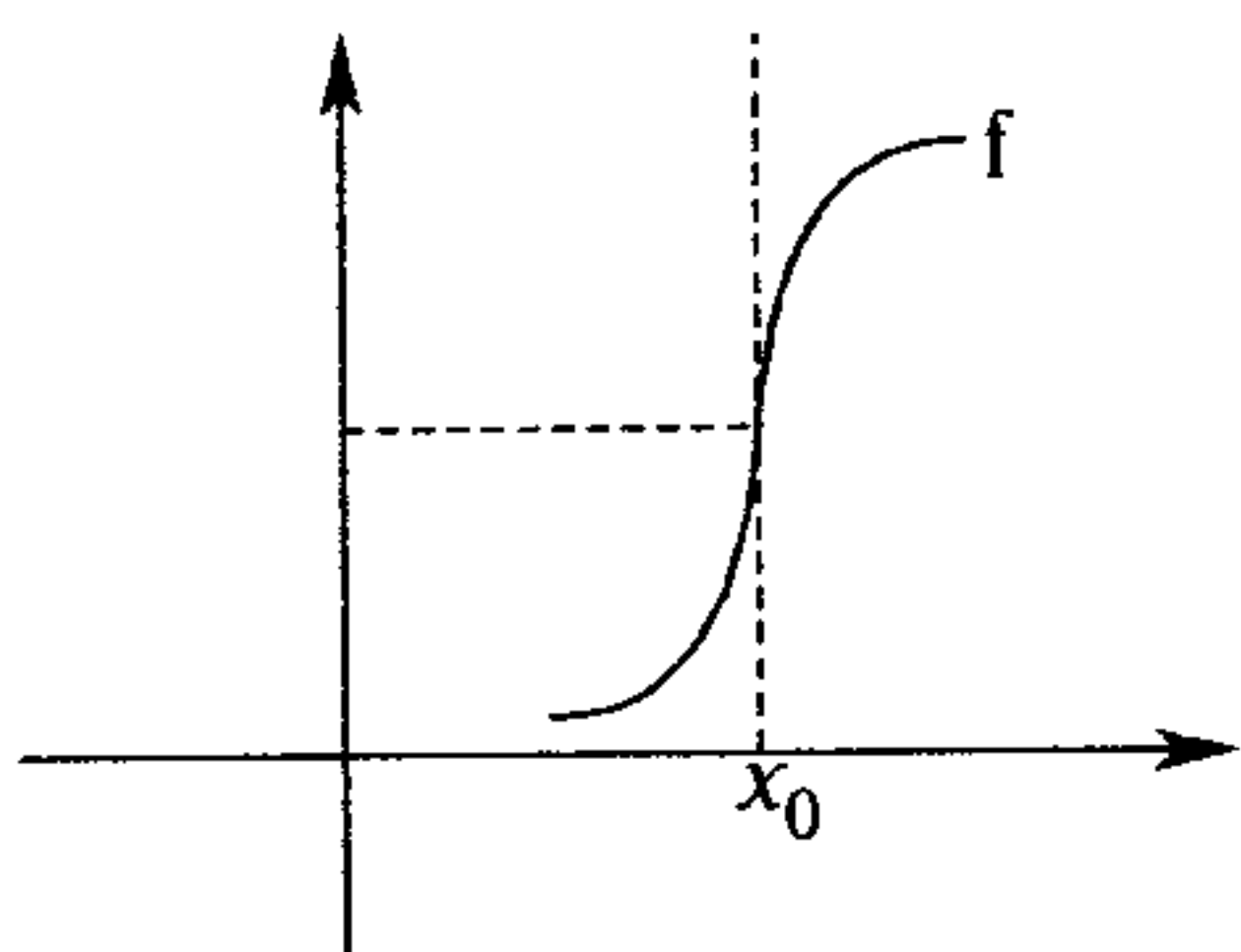
a.



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

$x = x_0$  es tangente al gráfico de  $f$  en  $x_0$ .

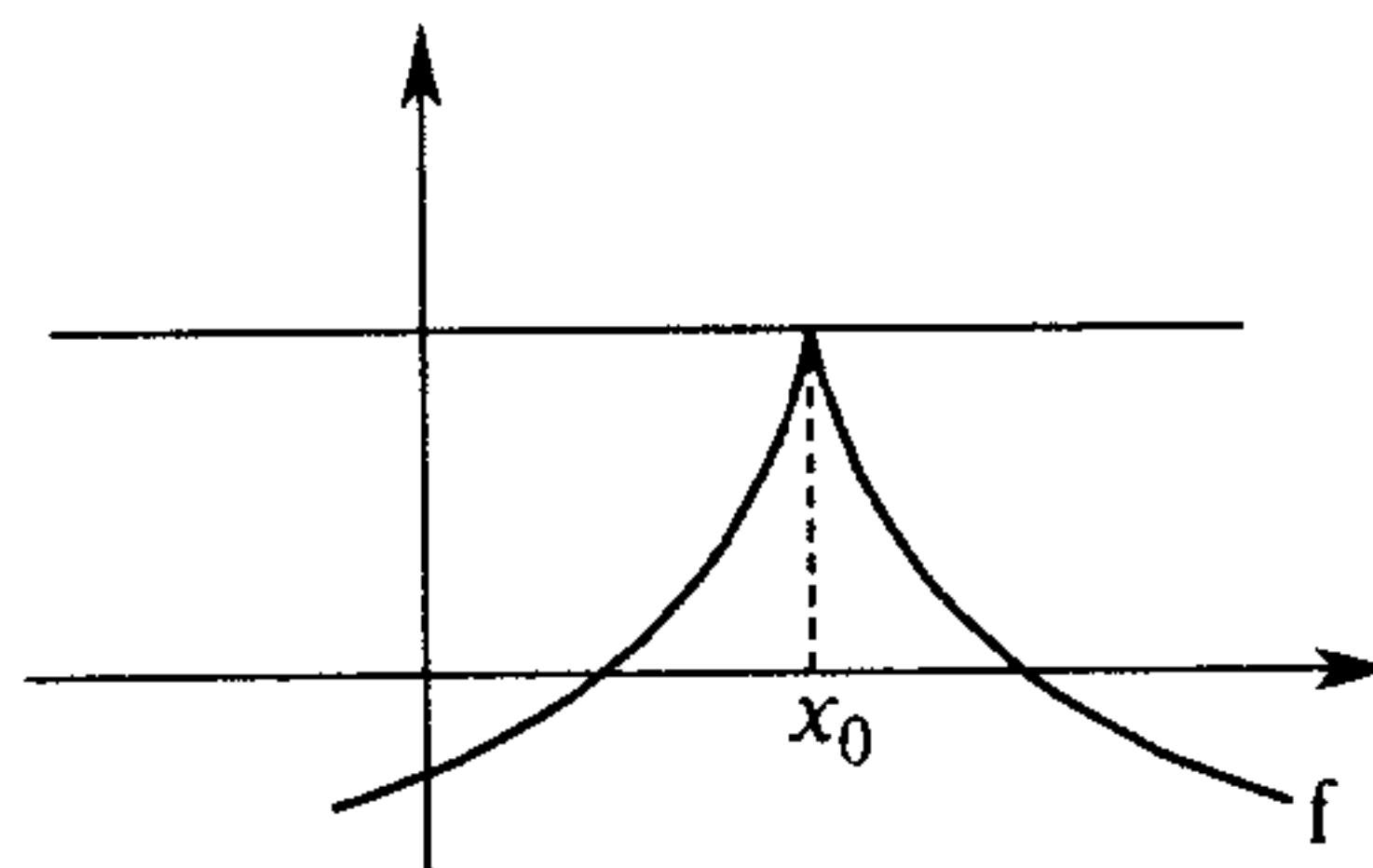
b.



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

$x = x_0$  es tangente al gráfico de  $f$  en  $x_0$ .

c.

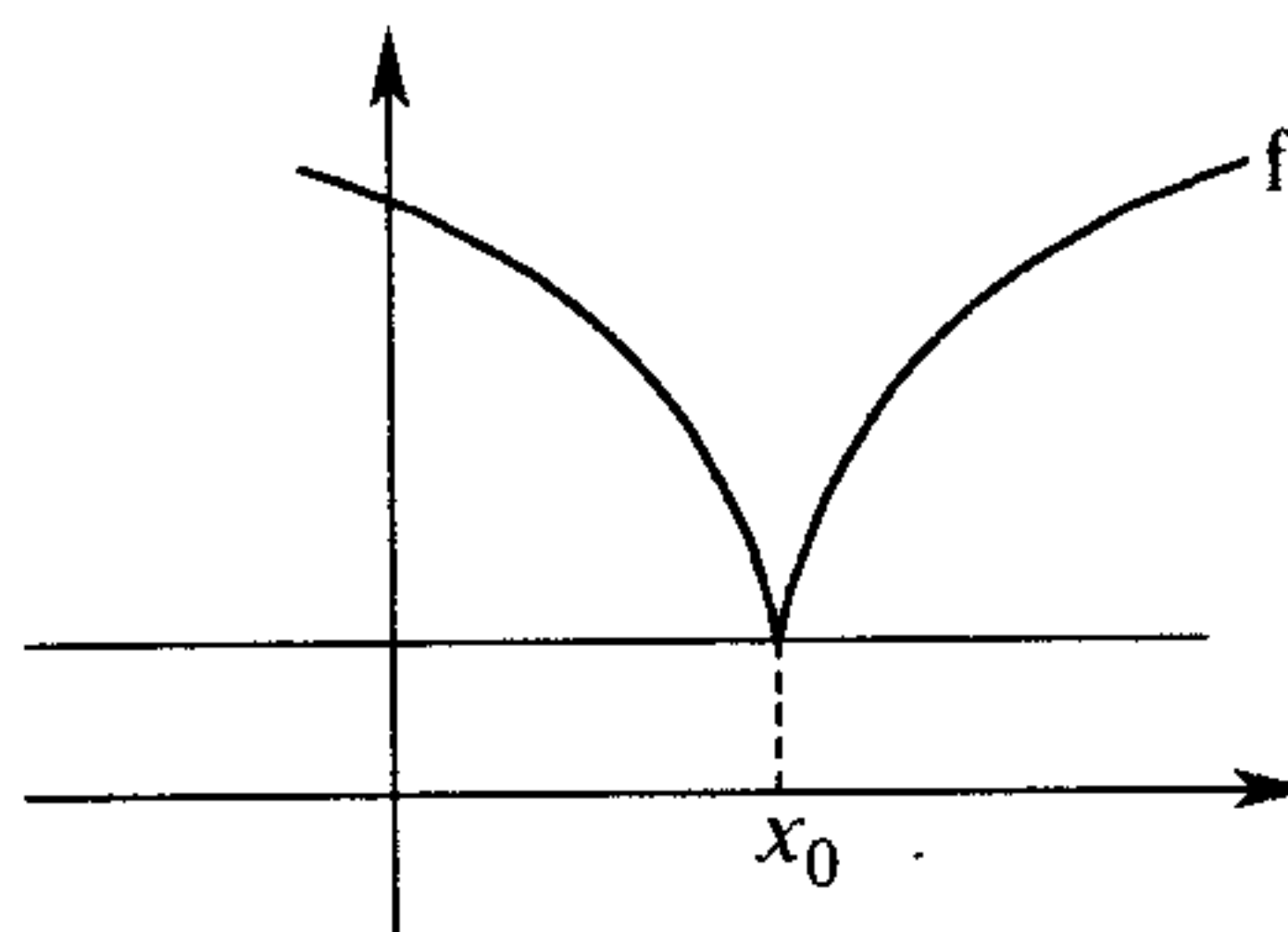


$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

$x = x_0$  es tangente al gráfico de  $f$ .

d.



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

$x = x_0$  es tangente al gráfico de  $f$ .

## DERIVADAS LATERALES

## Definición (Derivada por la derecha)

Dada la función  $f(x)$ , la derivada por la derecha, de  $f(x)$  en el punto  $x_0$  es:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si tal límite existe.

## Definición (Derivada por la izquierda)

Dada la función  $f(x)$ , la derivada por la izquierda, de  $f(x)$  en el punto  $x_0$  es:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si tal límite existe.



**CONDICIONES DE EXISTENCIA**

En consecuencia inmediata de la definición de límite,  $f'(x_0)$  existe si y sólo si las derivadas laterales existen y son iguales, es decir:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

**Ejemplo:**

Ver si  $f(x) = |\sin x|$  es diferenciable en  $x=0$ .

**Resolución:**

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|\sin h|}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|\sin h|}{h} = -1$$

$\therefore f(x) = |\sin x|$  no es diferenciable en  $x_0$  ya que

$$f'_+(0) \neq f'_-(0).$$

**TEOREMA**

Si una función es diferenciable en  $x_0$ , entonces  $f$  es continua en  $x_0$ .

**Demostración**

Debemos demostrar que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \cdot h$$

$\therefore f(x)$  es continua en  $x$ .



El recíproco del teorema no necesariamente se cumple, es decir, si  $f$  es continua en  $x_0$  no implica que sea diferenciable en  $x_0$ .

**Ejemplo:**

Sea  $f(x) = |x|$

$f(x)$  es continua en  $\forall x \in \mathbb{R}$ , en particular es continua en  $x_0$ , sin embargo, no es diferenciable en  $x=0$  puesto que  $f'_+(0) = 1 \wedge f'_-(0) = -1$  y como  $f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow$  no existe  $f'(0)$ .

**Corolario**

Si la función  $f$  es derivable sobre el intervalo  $I$ , entonces  $f$  es continua sobre  $I$ .

**Corolario**

$f$  es definida en  $[a; b]$  diremos que  $f$  es derivable en todo el intervalo  $[a; b]$  si lo es en  $\langle a; b \rangle$  y además existe  $f'_+(a)$  y  $f'_-(b)$ .

**TEOREMA**

Sea  $f(x) = k, k \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{dk}{dx} = 0; \forall k \in \mathbb{R}$

**Demostración**

Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{dx} = 0; \forall k \text{ constante real.}$$

**TEOREMA**

Sea  $f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

**Demostración**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left( x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n \right) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right) = nx^{n-1}$$

$$\therefore f'(x) = nx^{n-1}; n \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{R}$$

**Ejemplos:**

$$\text{Si } f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$\text{Si } f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$\text{Si } f(x) = x^{50} \Rightarrow f'(x) = 50x^{49}$$

**TEOREMA**

$$\frac{d}{dx} (kf(x)) = k \frac{d}{dx} f(x) ; k = \text{cte.}$$

**Ejemplos:**

$$\text{Si } f(x) = 4x^5 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot 5x^4 = 20x^4$$

$$\text{Si } g(x) = \frac{3}{2}x^4 \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2} \cdot 4x^3 = 6x^3$$

$$\text{Si } h(x) = -5x^3 \Rightarrow h'(x) = 5 \cdot 3x^2 = -15x^2$$

**TEOREMA**

$$\text{Si } f(x) = g(x) + s(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + s'(x)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{por definición}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x+h) + s(x+h)) - (g(x) + s(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)] + [s(x+h) - s(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \right) \\ &= g'(x) + s'(x) \\ \therefore (g(x) + s(x))' &= g'(x) + s'(x) \end{aligned}$$

**Ejemplos:**

$$\text{Si } f(x) = 3x^2 + 5x + 7 \Rightarrow f'(x) = 6x + 5$$

$$\text{Si } s(x) = 4x^9 + 14 \Rightarrow s'(x) = 4 \cdot 9x^8 = 36x^8$$

**TEOREMA**

$$\text{Si } f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} ; n \in \mathbb{N}$$

**Ejemplos:**

$$\text{Si } f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Si } h(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow h'(x) = d\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

**TEOREMA**

$$\text{Si } f(x) = x^r ; r \in \mathbb{Q} \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1}$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} \text{Sea } r &= \frac{m}{n} \Rightarrow f(x) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m \\ f(x) &= m \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \frac{d}{dx} \left(x^{1/n}\right) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

**Ejemplos:**

$$\text{Si } f(x) = x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}$$

$$\text{Si } h(x) = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow h'(x) = \frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}$$

**TEOREMA**

$$\frac{d}{dx} \{f(x) \cdot g(x)\} = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$$

**Demostración**

Por definición

$$\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Sumando y restando:  $f(x+h) \cdot g(x)$  al numerador

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)\{g(x+h) - g(x)\} + g(x)\{f(x+h) - f(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \left( \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x) \end{aligned}$$

**Corolario**

$$\text{Si } f = uvq \Rightarrow f' = uvq' + uqv' + vqu'$$

**TEOREMA**

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{g(x) \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{g^2(x)}; g(x) \neq 0$$

**Demostración**

Por definición

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) f(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \end{aligned}$$

Sumando y restando en el numerador  $f(x) \cdot g(x)$  se tiene:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\ &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \left( \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot g(x)} \\ &= \frac{g(x) \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{g^2(x)}; g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

**DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA**

Sea  $f(x)$  una función biyectiva y  $f^*(x)$ , la función inversa de  $f(x)$  se tiene:

$$\frac{d}{dy} f^*(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)}$$

**Demostración:**

Sabemos  $f^* \circ f(x) = x$

Derivando respecto a  $x$

$$(f^*(f))' \cdot f'(x) = 1$$

$$\text{De donde } \frac{d}{dy} f^*(y) = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$$

**TEOREMA**

$$d(f(g(x))) = \frac{d(f(g))}{d g(x)} \cdot \frac{d g(x)}{dx}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

**Demostración**

Cuando la variable es  $x+h$ , entonces la función  $g$  correspondiente es  $g(x+h)$ . Entonces

$\Delta g = g(x+h) - g(x)$ ; es decir  $\Delta g + g(x) = g(x+h)$ , esto indica  $f(g(x+h)) = f(g + \Delta g)$  y entonces  $\Delta f = f(g + \Delta g) - f(g)$ .

Ahora, debido a que  $\Delta g \neq 0$  podemos escribir:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}, \quad \Delta x = h$$

Es decir:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(g + \Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Tomando límite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} &= \lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{f(g + \Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{d}{dg} f(g) \cdot \frac{dg(x)}{dx} \quad \text{Regla de la cadena.} \end{aligned}$$

**Ejemplo 1**

Halle la derivada de la función:

$$f(x) = 2x^5 + x - \sqrt[3]{x} + 6 \quad \text{respecto a } x$$

**Resolución:**

$$f'(x) = (2x^5)' + (x)' - (\sqrt[3]{x})' + (6)'$$

$$= 2 \cdot 5x^4 + 1 - \frac{1}{3}x^{-2/3} + 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 10x^4 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 1$$



**Ejemplo 2**

Halle la derivada de:  $f(x) = \frac{8+x^2}{3-x}$

**Resolución:**

$$f'(x) = \frac{(3-x) \cdot 2x - (8+x^2)(-1)}{(3-x)^2} = \frac{-x^2 + 6x + 8}{(3-x)^2}$$

**Ejemplo 3**

Halle la derivada de:  $g(x) = \sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

**Resolución:**

$$\begin{aligned} g(x) &= (3x^2 - 5x + 2)^{1/2} \\ \Rightarrow g'(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 5x + 2)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 5x + 2}} \cdot (6x - 5) \\ \Rightarrow g'(x) &= \frac{6x - 5}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}} \end{aligned}$$

**TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES**

En lo que sigue  $f$  es una función diferenciable de  $x$ , las funciones inversas se definen con los valores principales.

1.  $\frac{d}{dx}c = 0$ ,  $c$  es constante
2.  $\frac{d}{dx}f^n(x) = nf^{n-1}(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
3.  $\frac{d}{dx}\text{sen}(f(x)) = \cos(f(x)) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
4.  $\frac{d}{dx}(\cos f(x)) = -\text{sen}(f(x)) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
5.  $\frac{d}{dx}\tan(f(x)) = \sec^2 f(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
6.  $\frac{d}{dx}\cot(f(x)) = -\csc^2 f(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
7.  $\frac{d}{dx}\sec f(x) = \sec f(x) \cdot \tan f(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
8.  $\frac{d}{dx}\csc f(x) = -\csc f(x) \cdot \cot f(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
9.  $\frac{d}{dx}\log_a f(x) = \frac{\log_a e}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx}f(x)$ ,  $a > 0 \wedge a \neq 1$   
 $\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{df(x)}{f(x)}$

10.  $\frac{d}{dx}a^{f(x)} = a^{f(x)} \ln a \cdot \frac{df(x)}{dx}$   
 $\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
11.  $\frac{d}{dx}\text{arc sen } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
12.  $\frac{d}{dx}\text{arc cos } f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
13.  $\frac{d}{dx}\text{arc tan } f(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
14.  $\frac{d}{dx}\text{arc cot } f(x) = -\frac{1}{1+f^2(x)} \cdot \frac{d}{dx}f(x)$
15.  $\frac{d}{dx}\text{arc sec } f(x) = \pm \frac{1}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}} \cdot \frac{d}{dx}f(x)$   
 + si  $f(x) > 1$   
 - si  $f(x) < -1$
16.  $\frac{d}{dx}\text{arc csc } f(x) = \mp \frac{1}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}} \cdot \frac{d}{dx}f(x)$

**Ejemplo 1**

Derivar las siguientes funciones:

- a)  $f(x) = 3\text{sen}^2(5x)$   
 b)  $g(x) = \ln(x^2 + 5x - 1) + e^{3x+1}$   
 c)  $h(x) = \arcsen(5x) + \arctan(7x-1)$

**Resolución:**

Usando las derivadas de las funciones elementales:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= (3\text{sen}^2 5x)' = 3 \cdot 2\text{sen}(5x) \cdot \frac{d}{dx}(\text{sen } 5x) \\ &= 6\text{sen } 5x \cdot \cos 5x \cdot \frac{d}{dx}(5x) \\ &= 6 \cdot \text{sen } 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = 30\text{sen } 5x \cdot \cos 5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g'(x) &= \frac{d}{dx}(\ln(x^2 + 5x - 1)) + \frac{d}{dx}(e^{3x+1}) \\ &= \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 5x - 1)}{x^2 + 5x - 1} + e^{3x+1} \cdot \frac{d}{dx}(3x+1) \\ &= \frac{2x+5}{x^2 + 5x - 1} + e^{3x+1} \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h'(x) &= \frac{\frac{d}{dx}(5x)}{\sqrt{1-(5x)^2}} + \frac{\frac{d}{dx}(7x-1)}{1+(7x-1)^2} \\ &= \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}} + \frac{7}{49x^2 - 14x} \end{aligned}$$

**Ejemplo 2**Halle la derivada de:  $y = 2x^5 + x - \sqrt[3]{x} + 6$ **Resolución:**

$$y' = (2x^5)' + (x)' - (\sqrt[3]{x})' + (6)' = 10x^4 + 1 - \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

**Ejemplo 3**Derivar la función  $f(x) = \sqrt[3]{\text{sen } x + \ln x - 3x^2}$ **Resolución:**

$$f'(x) = \frac{1}{3}(\text{sen } x + \ln x - 3x^2)(\text{sen } x + \ln x - 3x^2)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(\text{sen } x + \ln x - 3x^2)\left(\cos x + \frac{1}{x} - 6x\right)$$

**Ejemplo 4**

Derivar la función

$$f(x) = \ln(\sqrt{x + \sqrt{x}} + \arcsen x)$$

**Resolución:**

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \arcsen x}(\sqrt{x + \sqrt{x}} + \arcsen x)'$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x})^{-1/2}\left(1 + \frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \arcsen x}$$

**Ejemplo 5**Derivar la función  $f(x) = 2^{e^x + \sqrt{x}}$ **Resolución:**

$$f'(x) = [2^{e^x + \sqrt{x}} \ln 2](e^x + \sqrt{x})'$$

$$f'(x) = [2^{e^x + \sqrt{x}} \ln 2]\left(e^x + \frac{1}{2}x^{-1/2}\right)$$

**Ejemplo 6**Dada la función  $f(x) = x^x$ , halle  $f'(1)$ **Resolución:**

Tomando logaritmos

$$\ln f(x) = \ln x^x$$

$$\ln f(x) = x \ln x$$

Tomando derivadas:

$$[\ln f(x)]' = [x \ln x]'$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x)[\ln x + 1]$$

$$f'(x) = x^x [\ln x + 1]$$

$$\Rightarrow f'(1) = 1^1 [\ln 1 + 1] = 1$$

**Ejemplo 7**

Calcular la derivada de orden n de la función:

$$f(x) = 2^{3x}$$

**Resolución:**

$$f'(x) = 2^{3x}(3) \ln 2 = 3 \ln 2 \cdot 2^{3x}$$

$$f''(x) = 3 \ln 2 \cdot 2^{3x}(3) \ln 2 = 3^2 (\ln 2)^2 \cdot 2^{3x}$$

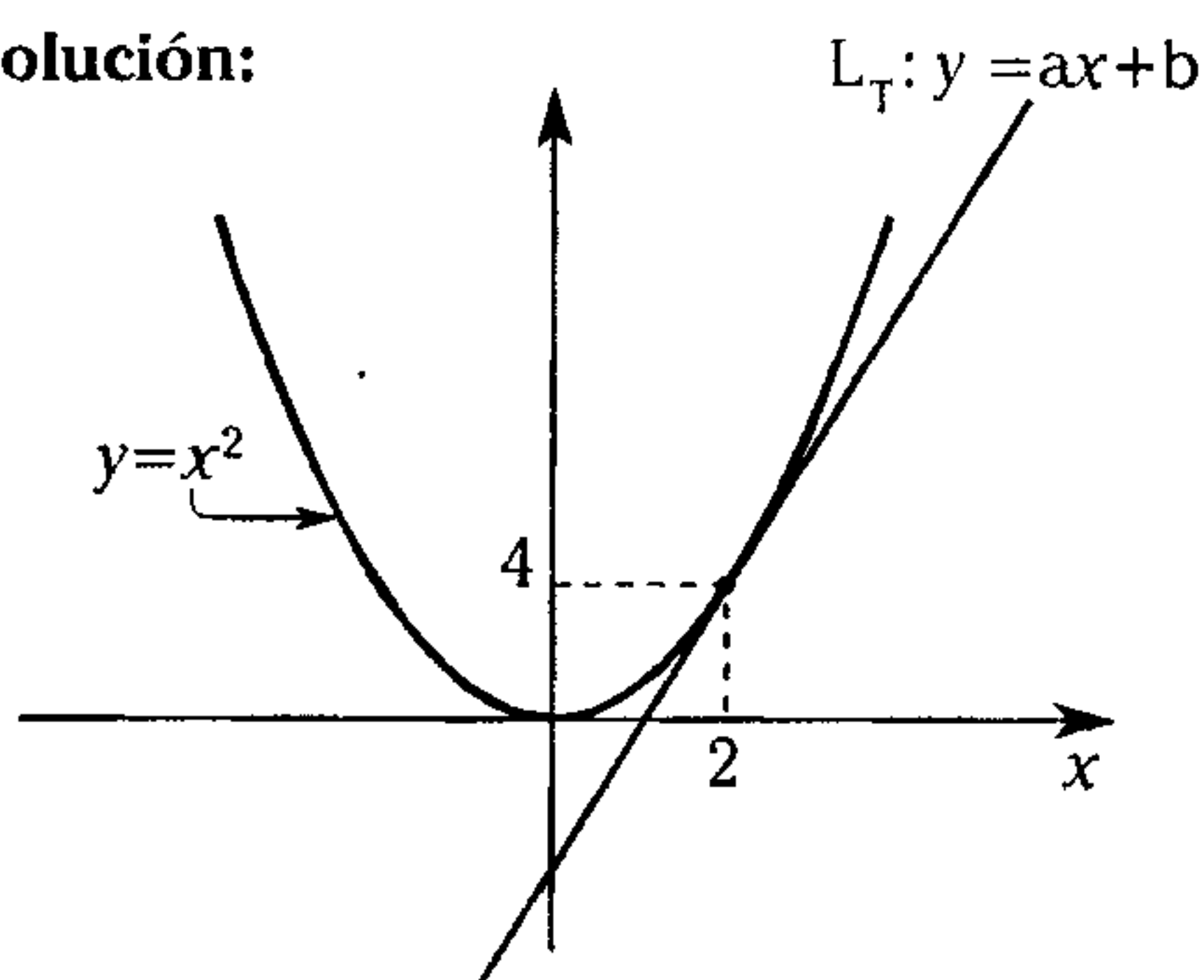
$$f'''(x) = 3^2 (\ln 2)^2 \cdot 2^{3x}(3) \ln 2 = 3^3 (\ln 2)^3 \cdot 2^{3x}$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = 3^n (\ln 2)^n \cdot 2^{3x}$$

**Ejemplo 8**

Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva  $y=x^2$ , en el punto donde  $x=2$ .

**Resolución:**

Sea:  $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$$\Rightarrow f'(2) = 4 = a \quad \text{pendiente de la recta tangente en } x=2$$

Además:  $(2, 4) \in L_T$

$$\Rightarrow 4 = 2a + b, \text{ como: } a = 4 \Rightarrow b = -4$$

$\therefore$  La ecuación de la recta tangente es:

$$L_T: y = 4x - 4$$

**CONDICIÓN DE EXISTENCIA DE LA DERIVADA**

Sea la función  $f$  definida por:

$$f = \begin{cases} f_1(x); & x \leq a \\ f_2(x); & x > a \end{cases}$$

Existe la derivada de  $f$  en el punto  $x=a$ , si se cumple que:

I.  $f_1(a) = f_2(a)$

II.  $f'_1(a) = f'_2(a)$

**Ejemplo 1**

Halle  $a$  y  $b$ , de modo que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-1}; & x > 2 \\ x^2 - 3x + b; & x \leq 2 \end{cases}$$

sea derivable o diferenciable en  $x=2$

**Resolución:**

Tenemos:  $f_1(x) = \frac{a}{x-1}$ ;  $f_2(x) = x^2 - 3x + b$

I.  $f_1(2) = f_2(2) \Rightarrow a = 4 - 6 + b$   
 $\Rightarrow a - b = -2 \dots\dots (\alpha)$

II.  $f'_1(2) = f'_2(2) \Rightarrow \frac{-a}{(x-1)^2} = 2x - 3$   
 $\Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$

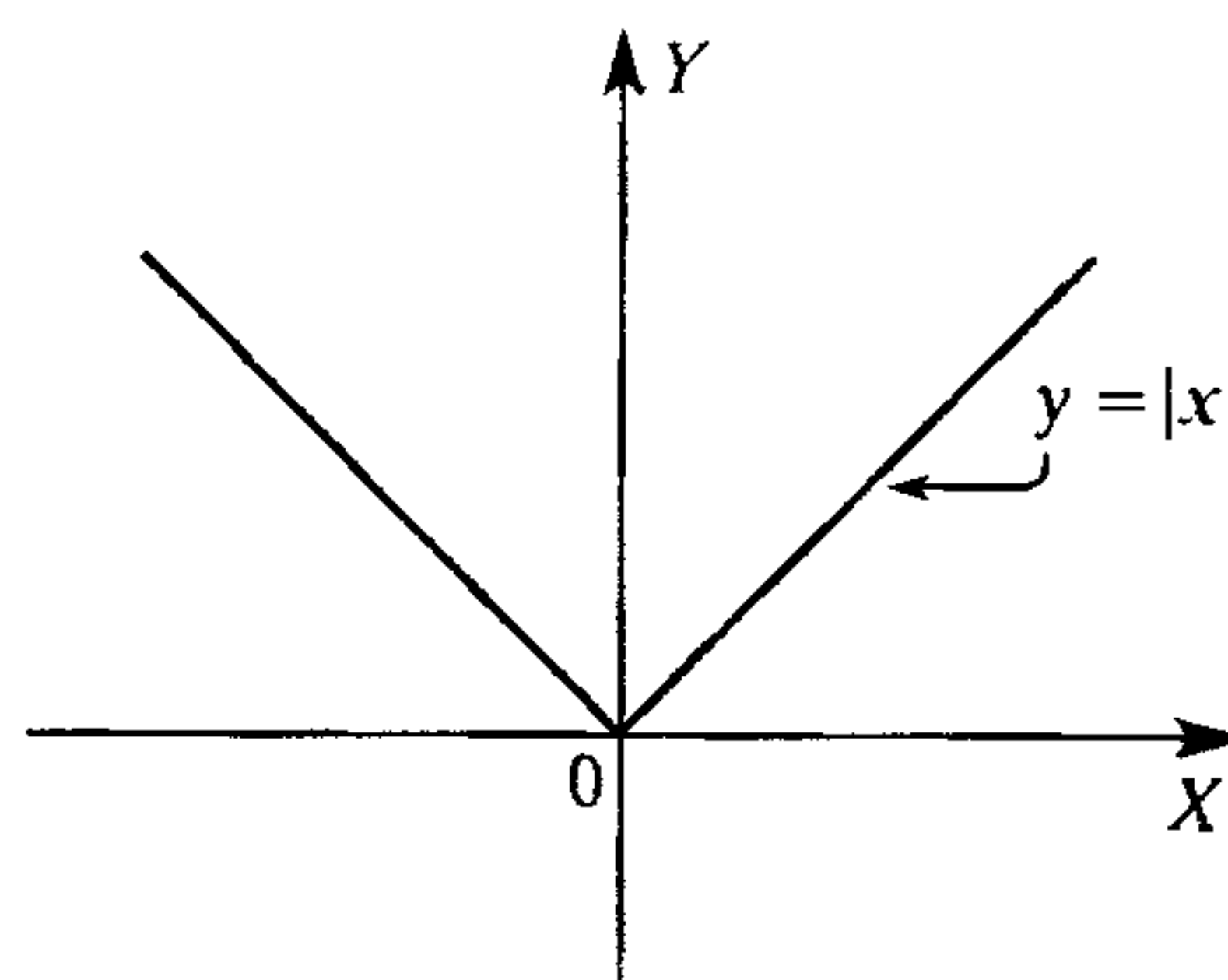
En  $(\alpha)$ :  $-1 - b = -2 \Rightarrow b = 1$

**Ejemplo 2**

Analizar si la función  $f(x) = |x|$  es diferenciable en  $x=0$ .

**Resolución:**

Tenemos:  $f(x) = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$



Vemos que no cumple con la segunda condición de existencia:

II.  $f'_1(x) = f'_2(x)$ ;  $f_1(x) = x$ ;  $f_2(x) = -x$

Vemos que:  $1 \neq -1$

$\therefore$  la función:  $f(x) = |x|$ , no es diferenciable en  $x=0$



# APLICACIÓN DE LA DERIVADA

## CÁLCULO DE LÍMITES

### 1. REGLA DE H'OSPITAL

Aplicado a las formas:  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \dots$$

Se deriva separadamente las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ ; hasta que el límite de la fracción sea determinada.

#### Ejemplo 1

Calcular  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$ ;  $a > 1$

**Resolución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^a - a^x)'}{(a^x - a^a)'} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax^{a-1} - a^x \ln a}{a^x \ln a - 0} \\ &= \frac{aa^{a-1} - a^a \ln a}{a^a \ln a} = \frac{1 - \ln a}{\ln a} \end{aligned}$$

#### Ejemplo 2

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$

**Resolución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\left[ \ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right) \right]'}{[x]'}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{a^x + b^x} \left( \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{2} \right)} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab} \end{aligned}$$

#### Ejemplo 3

Calcular  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$

**Resolución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\ln(\sin x)^{\tan x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\frac{[\ln(\sin x)]'}{[\cot x]'}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{-\csc^2 x}} = e^{\frac{(1)(0)}{(1)}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

#### Ejemplo 4

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}$

**Resolución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x - x + 1)'}{(x - x^x)'} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1 + 0}{1 - x^x (\ln x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left( \frac{1}{x} - 1 \right)'}{\left( 1 - x^x \ln x - x^x \right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\left[ x^x (\ln x + 1) \ln x + \frac{x^x}{x} \right] - x^x (\ln x + 1)} \\ &= \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

#### Ejemplo 5

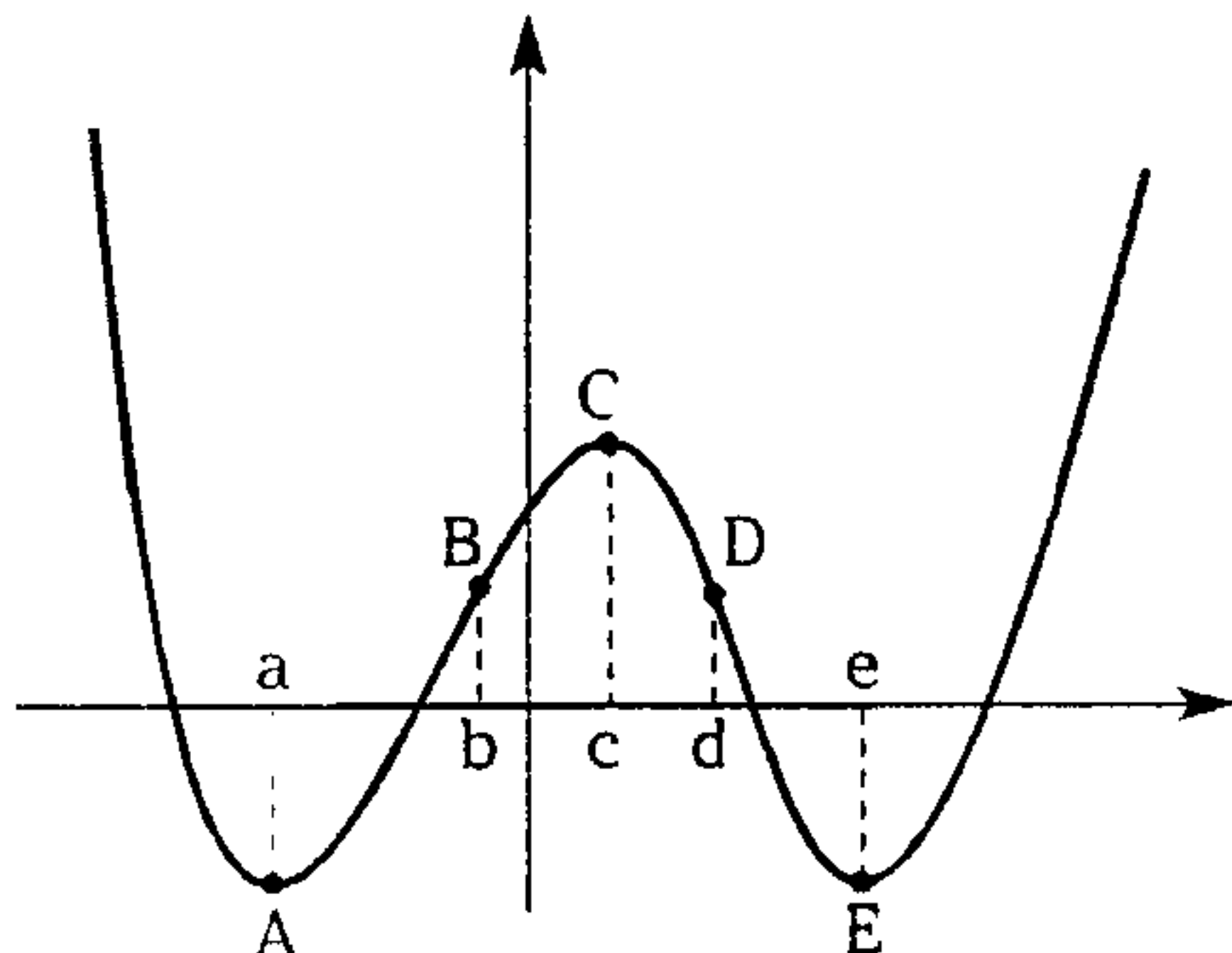
Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

**Resolución:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 3x)3}{1} = 3$$

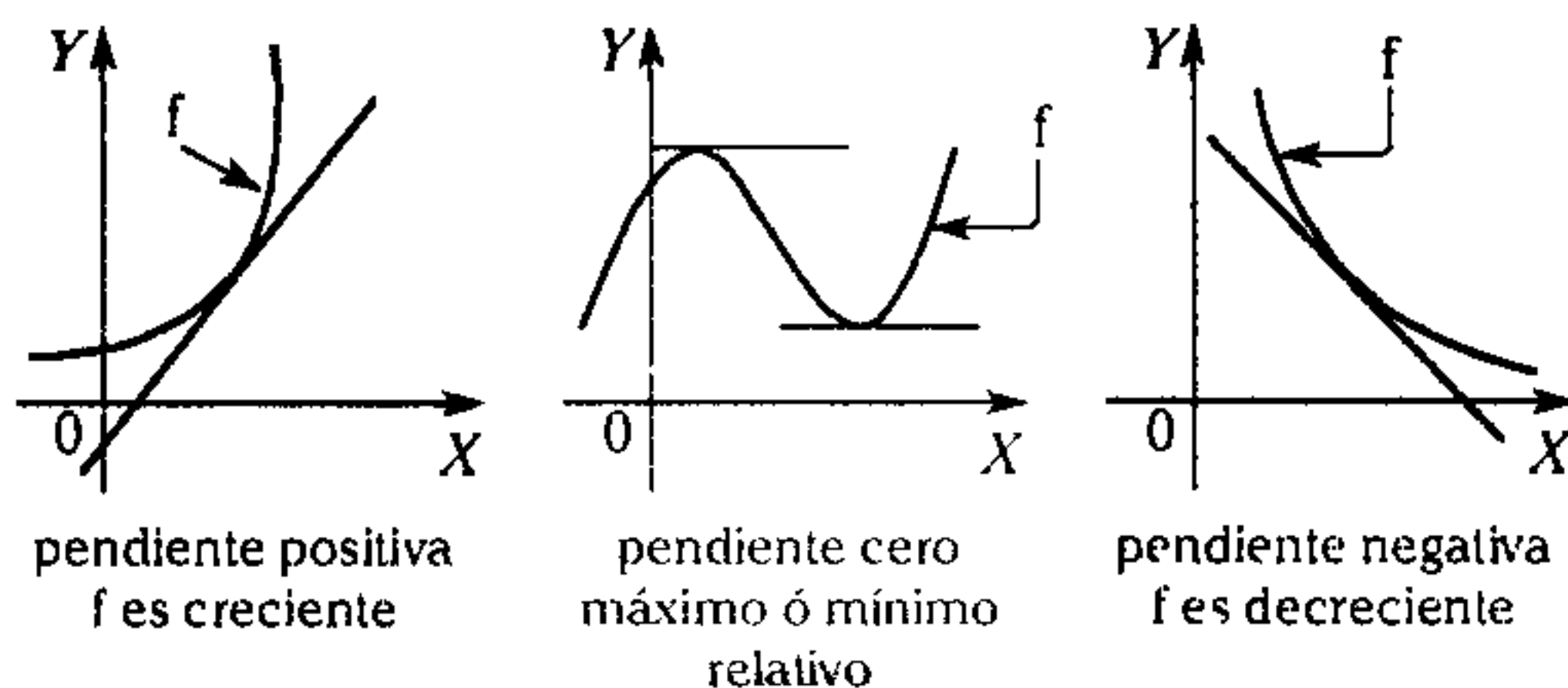
## LA DERIVADA EN EL ANÁLISIS DE FUNCIONES

## 1. GRÁFICA DE FUNCIONES



## DE LA PRIMERA DERIVADA

Teniendo en cuenta que la primera derivada representa la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto determinado, se tendrán los siguientes casos:



$f'(x) > 0$	La función es creciente
$f'(x) = 0$	La función tiene un máximo o mínimo relativo
$f'(x) < 0$	La función es decreciente

Del gráfico se observa:

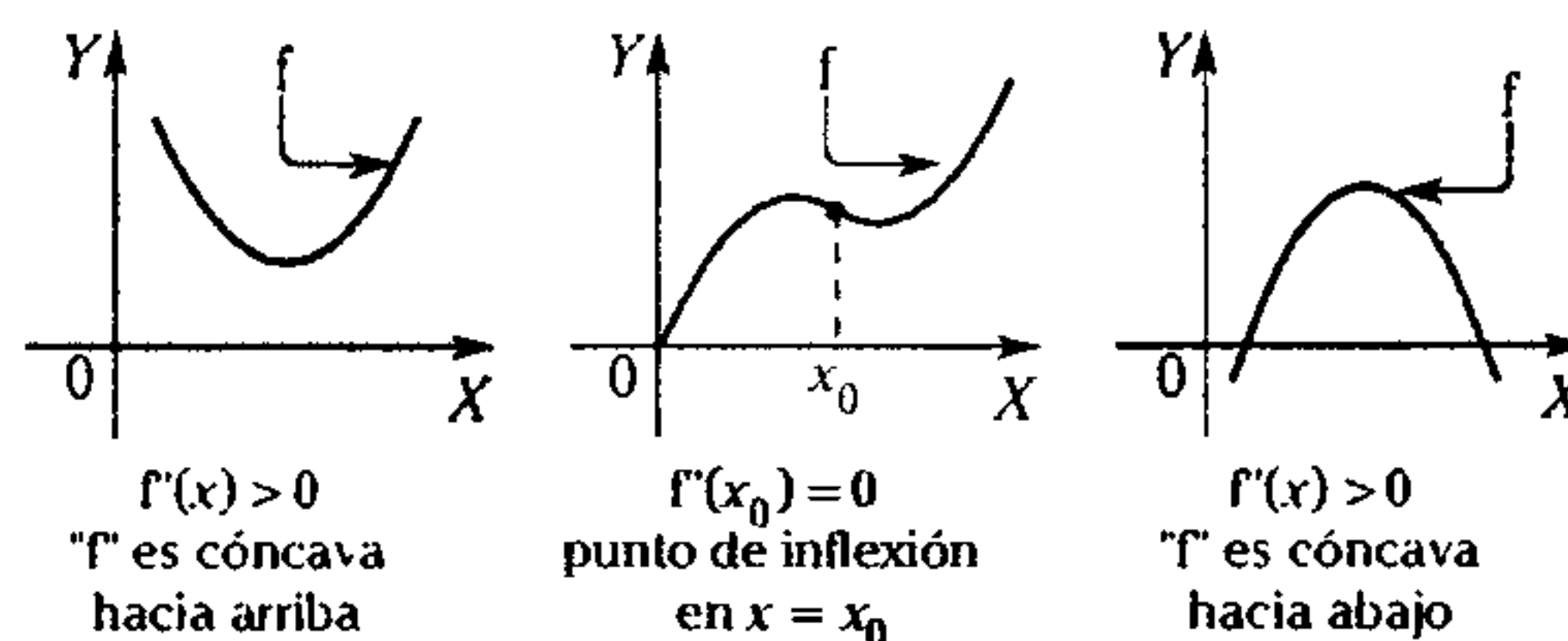
- Como  $f'(x) > 0$  en  $x \in \langle a, c \rangle \cup \langle e, +\infty \rangle$  la función es creciente
- Como  $f'(x) = 0$  en  $x = a \vee x = c \vee x = e$

$f(a)$   
 $f(e)$  } mínimos relativos

$f(c)$  } máximos relativos

- Como  $f'(x) < 0$  en  $x \in \langle -\infty, a \rangle \cup \langle c, e \rangle$  la función es decreciente

## DE LA SEGUNDA DERIVADA



$f''(x) > 0$	La función es cóncava hacia arriba
$f''(x) = 0$	La función tiene un punto de inflexión (donde cambia la concavidad)
$f''(x) < 0$	La función es cóncava hacia abajo

Del gráfico se observa

- Como  $f''(x) > 0$  en  $x \in \langle -\infty, b \rangle \cup \langle d, +\infty \rangle$  la función es cóncava hacia arriba.
- Como  $f''(x) = 0$  en  $x = b \vee x = d$ 

$$\left. \begin{array}{l} (b, f(b)) \\ (d, f(d)) \end{array} \right\} \text{puntos de inflexión}$$
- Como  $f''(x) < 0$  en  $x \in \langle b, d \rangle$  la función es cóncava hacia abajo.

## Ejemplo 1

Graficar la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$$

## Resolución:

Tenemos:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) > 0$$

$$x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$$

La función es creciente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = -27/2 \\ f(-2) = 10/3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máximos y} \\ \text{mínimos relativos} \end{array}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) < 0$$

$$x \in <-2, 3>$$

La función es decreciente.

### Analizando la segunda derivada

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x \in <1/2; \infty>$$

$$\text{En } x \in <1/2; +\infty>$$

la función es cóncava hacia arriba.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

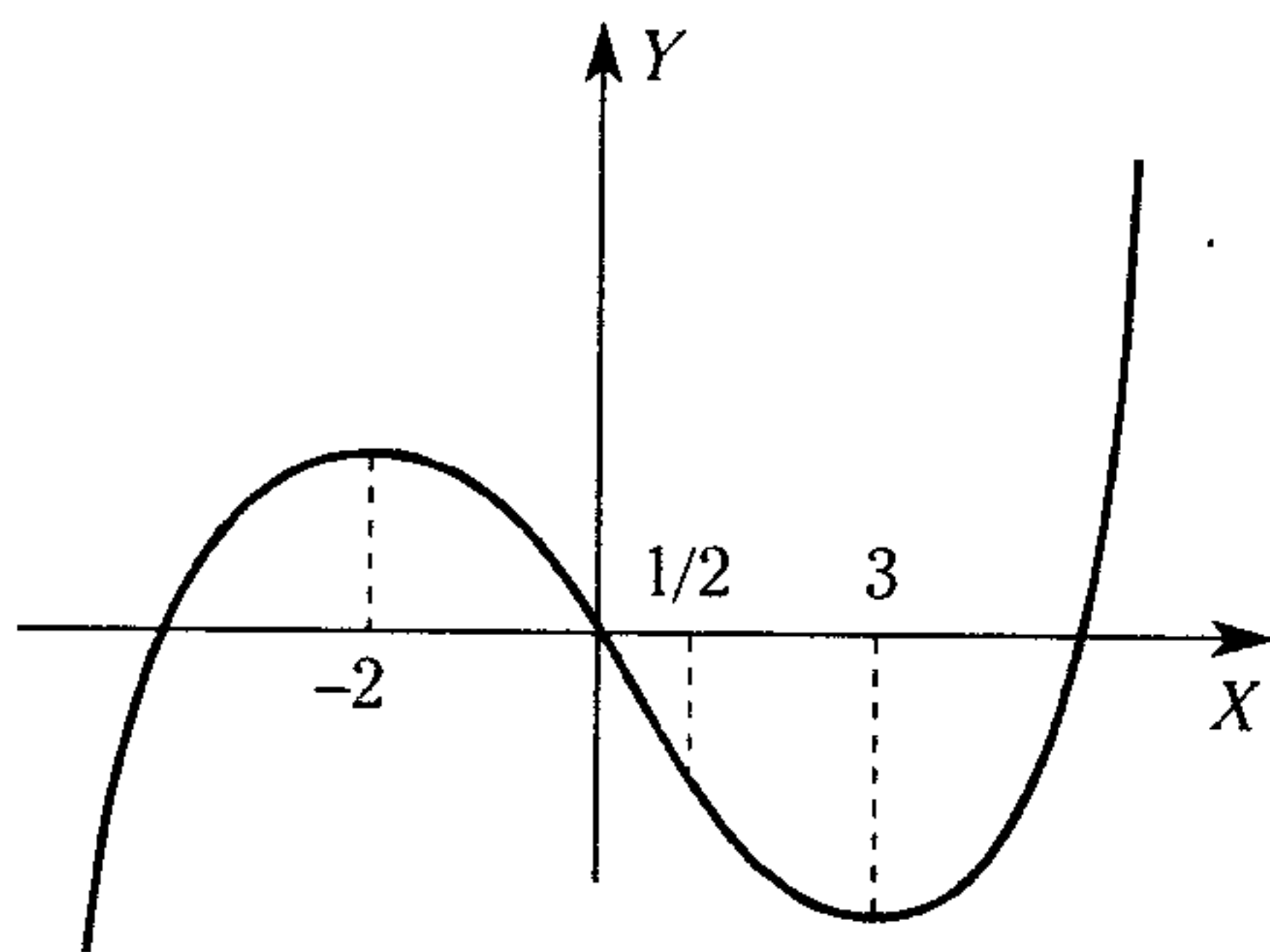
$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{37}{12}\right) \text{ es punto de inflexión.}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in <-\infty; 1/2>$$

$$\text{En } x \in <-\infty; 1/2>$$

la función es cóncava hacia abajo.

Ahora con toda la información que tenemos procedemos a graficar la función.



### Ejemplo 2

Graficar la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

### Resolución:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 - 1)^2 + 2x(2(x^2 - 1)2x)}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

### Analizando la primera derivada

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x < 0; f \text{ es creciente}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0; \text{mínimo o máximo}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x > 0; f \text{ es decreciente}$$

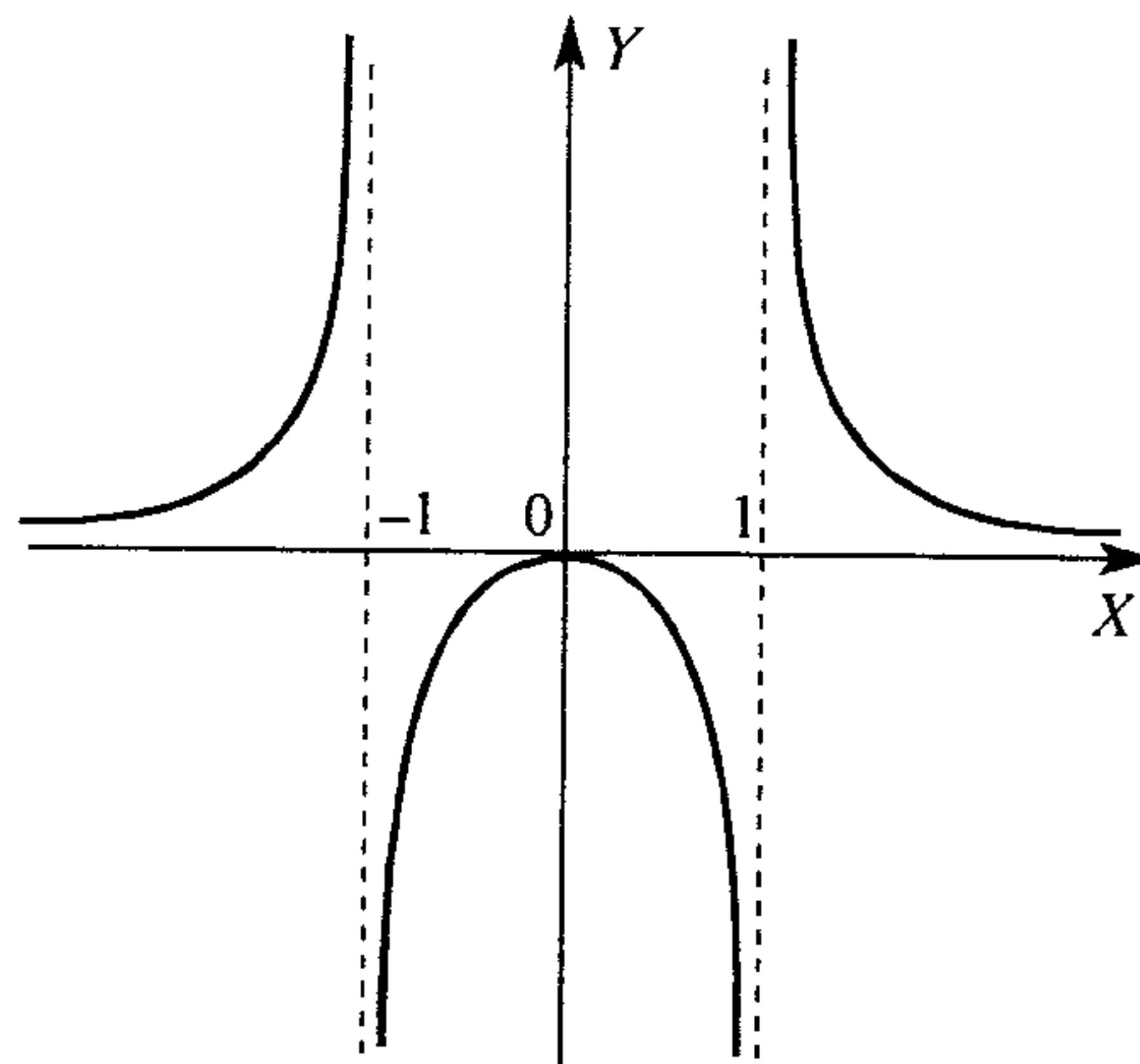
### Analizando la segunda derivada

$$f''(x) > 0 \Rightarrow x \in <-\infty, -1> \cup <1, +\infty>$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x \in \emptyset \Rightarrow \nexists \text{ punto de inflexión.}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow x \in <-1, 1> \text{ es cóncava hacia abajo}$$

Con toda esta información realizamos la gráfica:





**Ejemplo 3**

Respecto a la función:

$$f(x) = x^5 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{N}$$

Indicar verdadero (V) o falso (F)

- I. Tiene 3 raíces reales.
- II. Tiene una sola raíz negativa.
- III. Posee inversa.

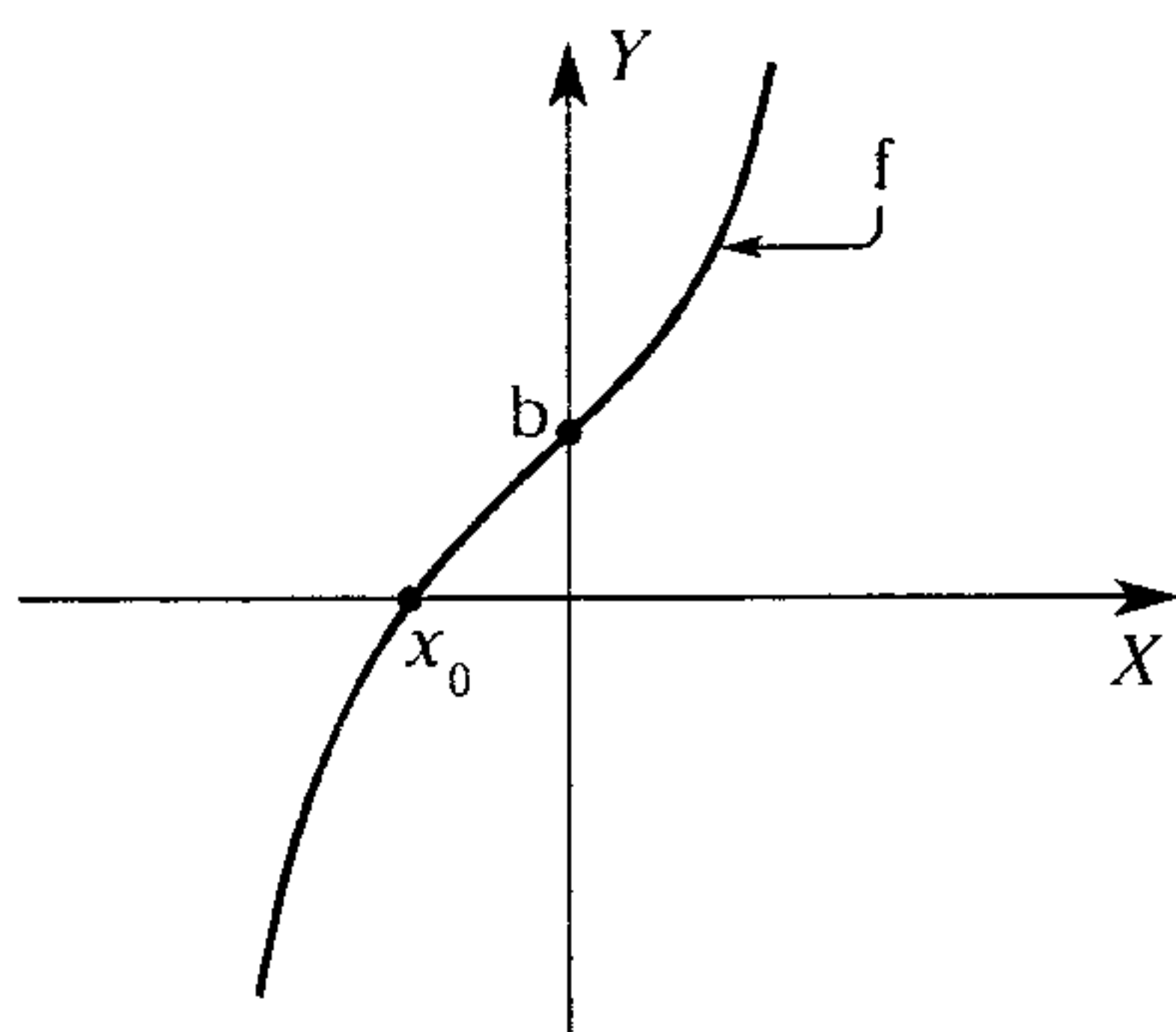
**Resolución:**

Al analizar la primera derivada se observa:

$$f'(x) = 5x^4 + a > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

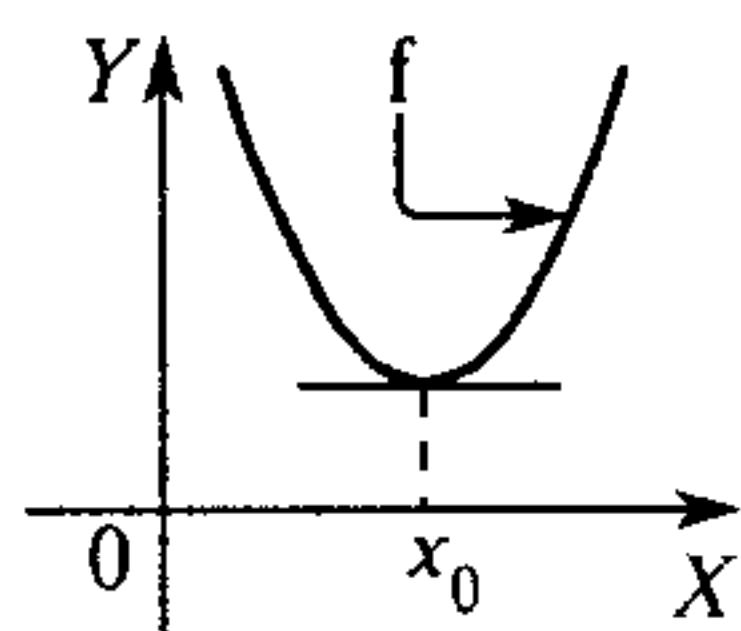
entonces,  $f$  es creciente siempre.Además,  $f(0) = b$ ,  $f(0) > 0$ 

Bosquejando la gráfica se tiene:

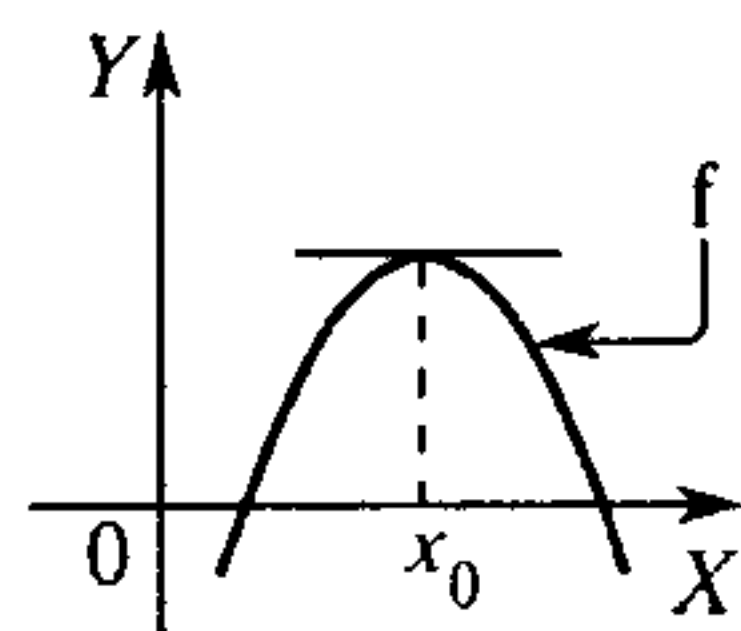


Vemos que solamente tiene una sola raíz real que es negativa puesto que:  $x_0 < 0$

La respuesta es FVV

**2. MÁXIMOS Y MÍNIMOS**Si tenemos  $x_0 \in Df$ , se cumple:

$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$   
tenemos un mínimo  
en  $x = x_0$

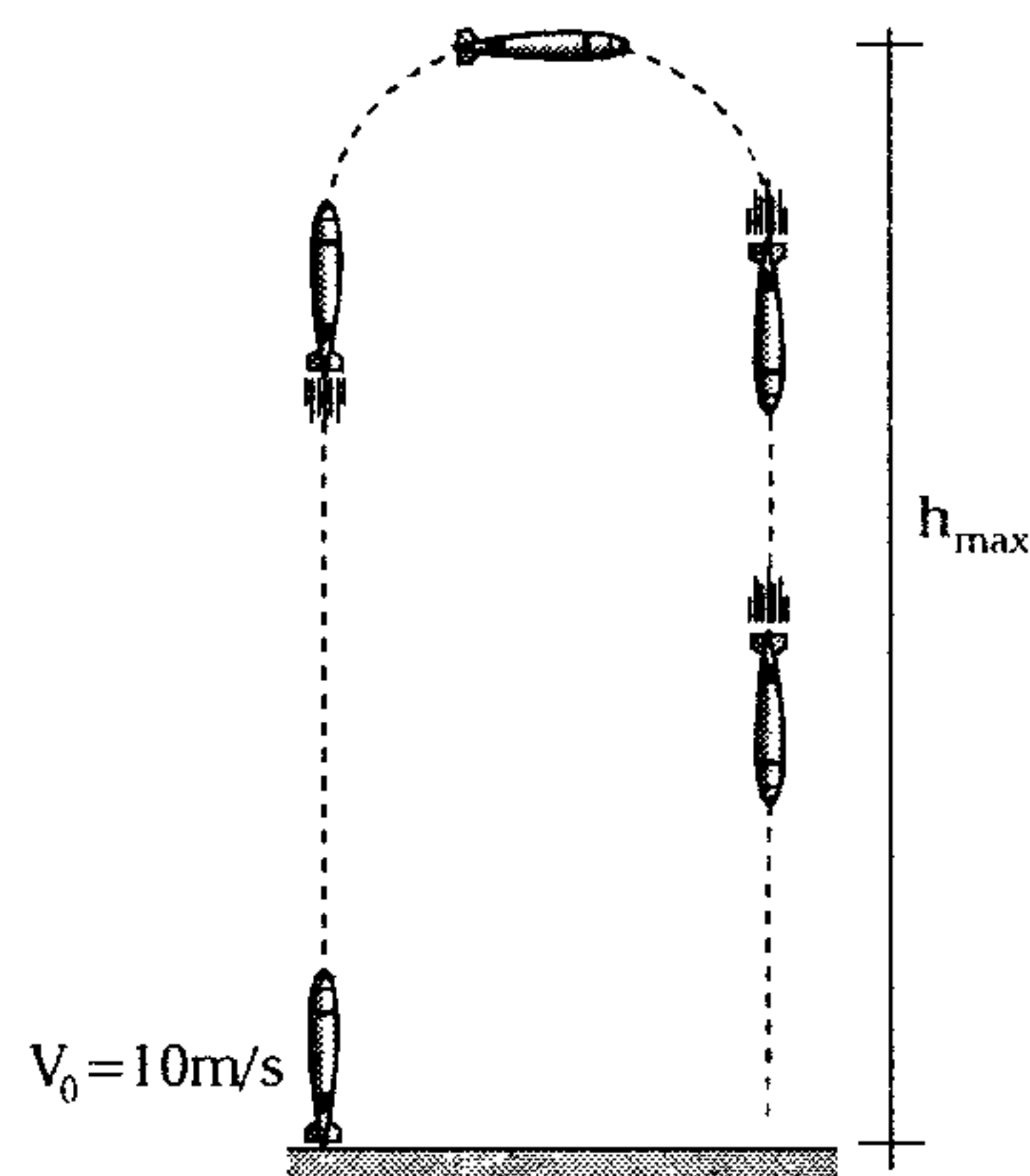


$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$   
tenemos un máximo  
en  $x = x_0$

$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) > 0$	Existe un mínimo en $x_0$ que viene a ser: $f(x_0)$
$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$	Existe un máximo en $x_0$ que viene a ser: $f(x_0)$

**Ejemplo 1**

Halle la altura máxima que alcanza un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s.

**Resolución:**

Sabemos por MRUV que  $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$  ..... ( $\alpha$ )

Derivando respecto a  $t$  se tiene:

$$h' = v_0 - g t = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}$$

$$\Rightarrow t = \frac{10}{10} = 1 \text{ s}$$

Reemplazando en ( $\alpha$ ):

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 10 + \frac{10}{2} = 15 \text{ m}$$

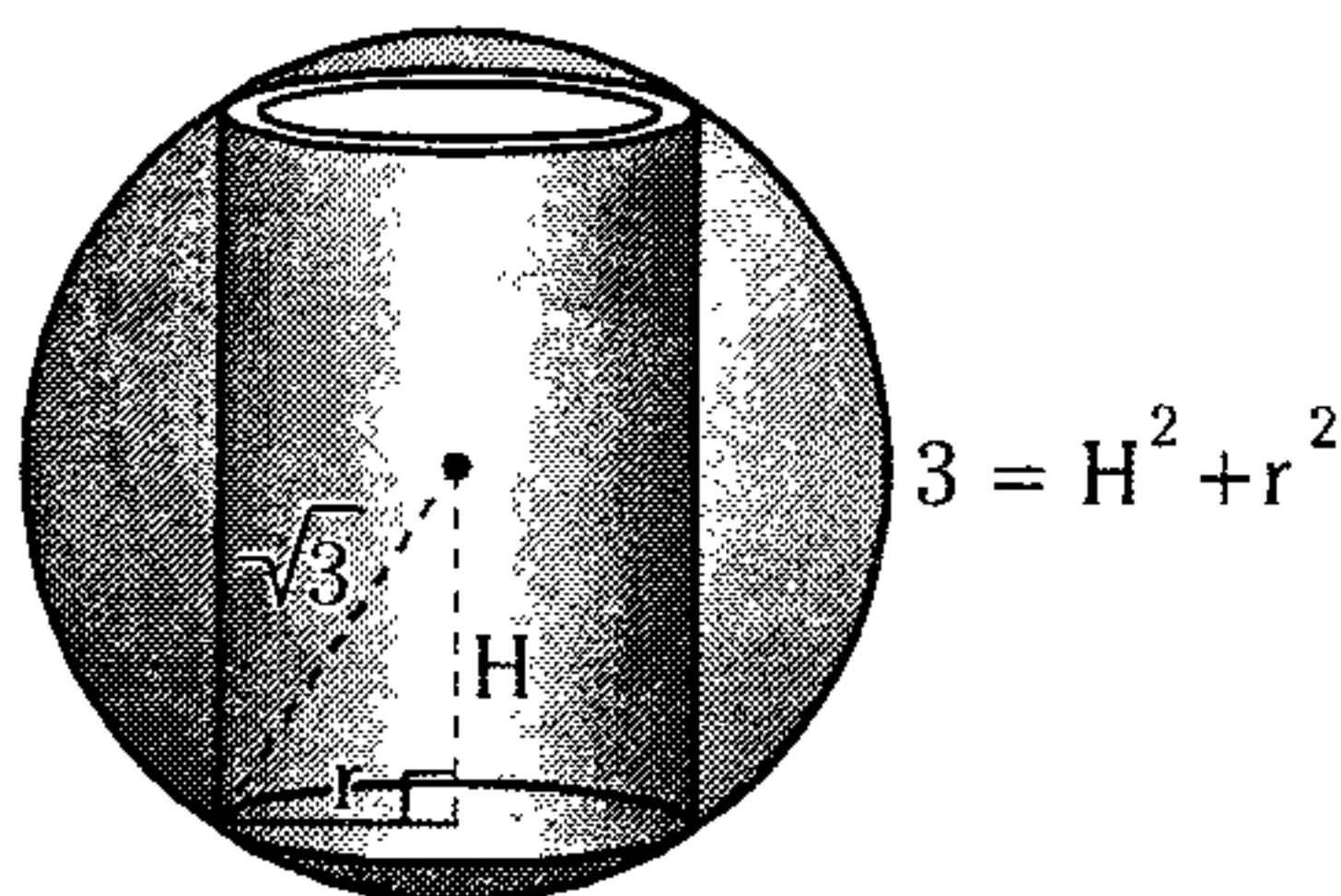
$$\Rightarrow h_{\max} = 15 \text{ m}$$

Es la altura máxima porque:

$$h''(1) = -g = -10 < 0$$

**Ejemplo 2**

Halle el máximo valor del volumen del cilindro que se puede inscribir en una esfera de radio  $\sqrt{3}$  m.

**Resolución:**

$$v = \pi r^2(2H) = \pi(3 - H^2)(2H)$$

$$v = 2\pi(3H - H^3) \dots\dots (\alpha)$$

Derivando respecto de  $H$

$$v' = 2\pi(3 - 3H^2) = 0 \Rightarrow H = 1$$

Reemplazando en  $(\alpha)$

$$v = 2\pi(3 - 1) = 4\pi$$

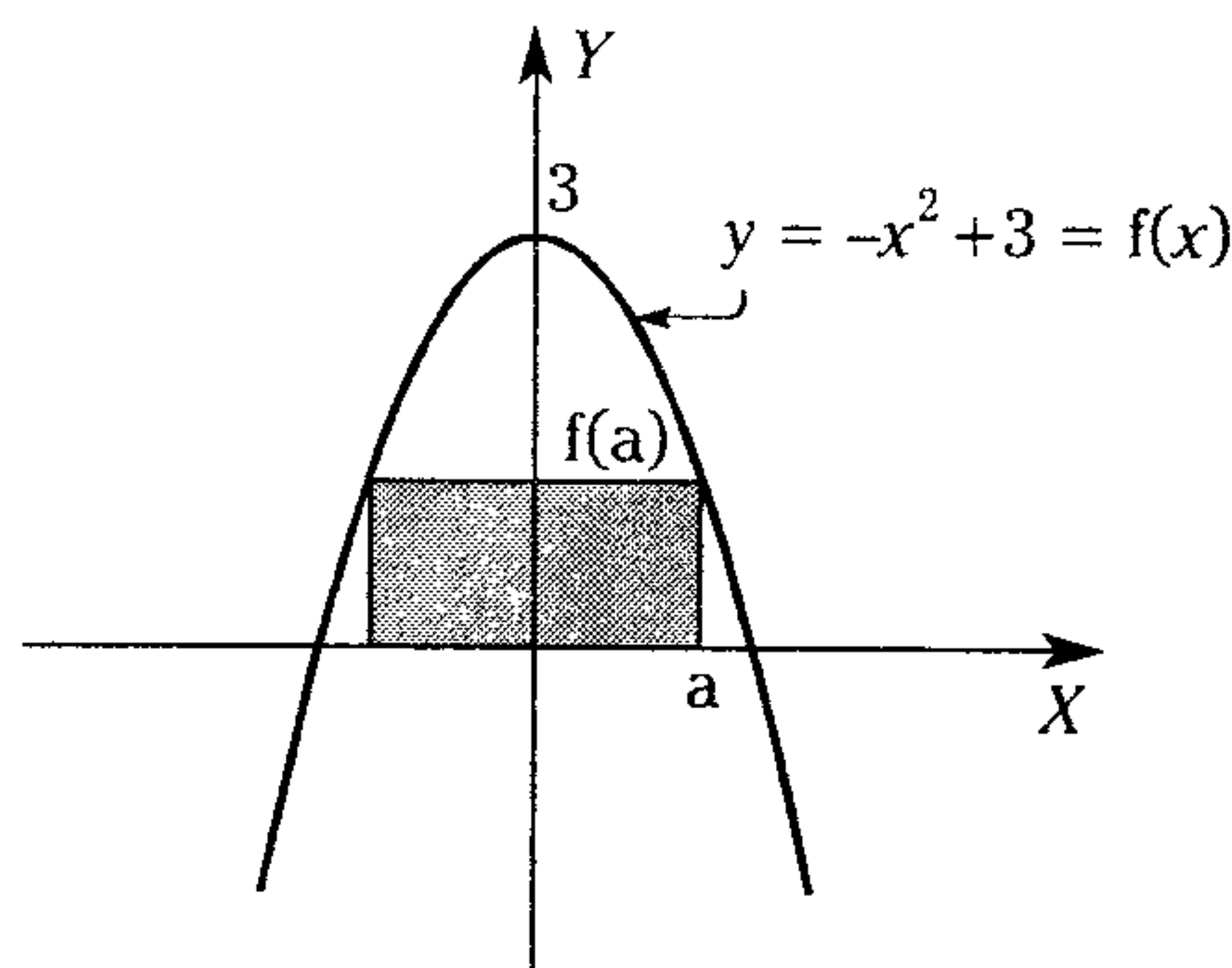
$$\Rightarrow v_{\max} = 4\pi \text{ m}^3$$

Es el volumen máximo porque:

$$v''(1) = 2\pi(-6(1)) < 0$$

**Ejemplo 3**

Calcular la máxima área del rectángulo inscrito en la región encerrada por la curva  $y = -x^2 + 3$  y el eje  $X$ .

**Resolución:**

$$A = (2a)f(a) = (2a)(3 - a^2)$$

$$A = 2(3a - a^3) \dots\dots (\alpha)$$

Derivando respecto de " $a$ "

$$A' = 2(3 - 3a^2) = 0 \Rightarrow a = 1$$

Reemplazando en  $(\alpha)$ :

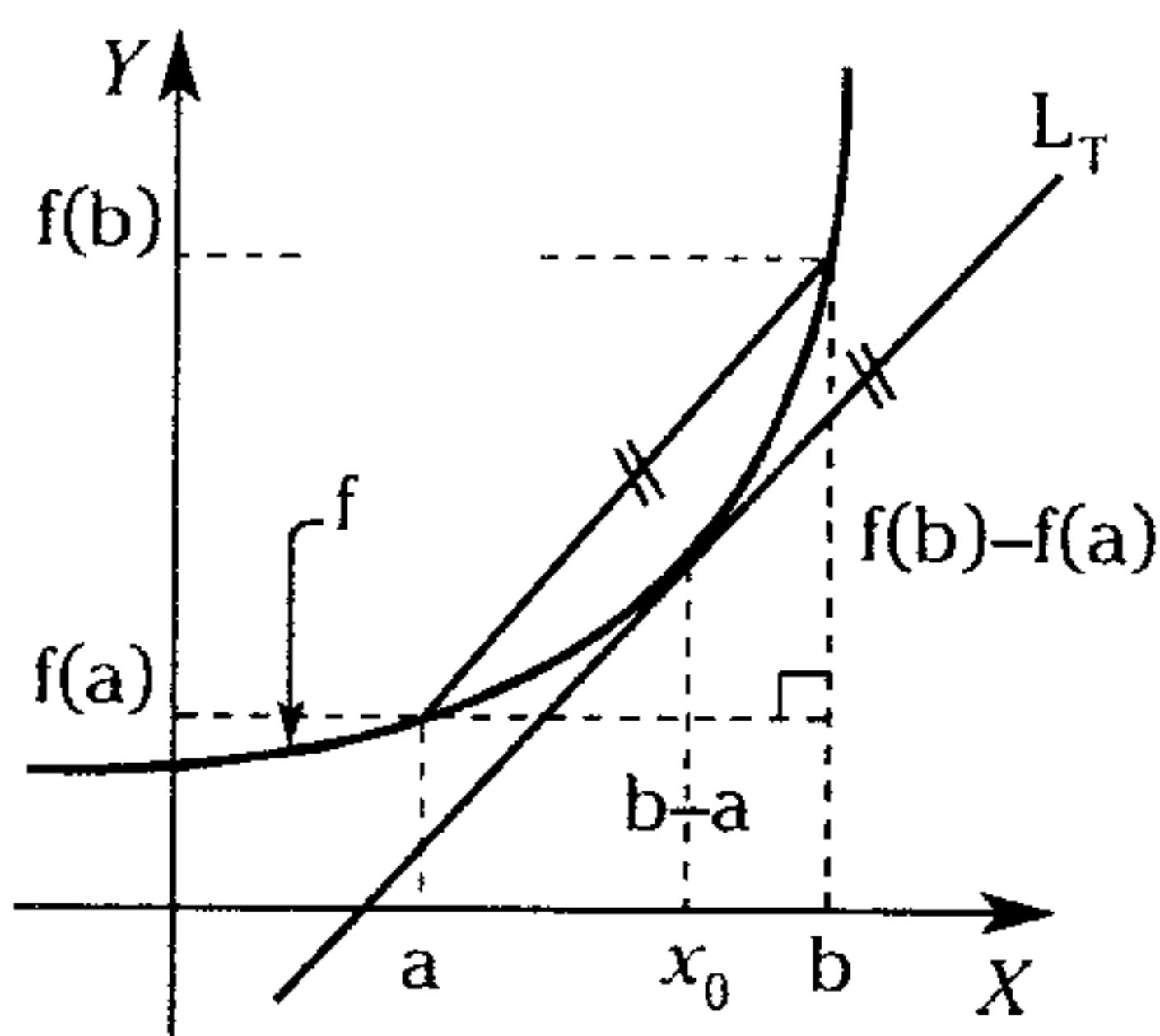
$$A = 2(3 - 1) = 4u^2$$

Es el área máxima porque:

$$A''(1) = 2(-6(1)) < 0$$

**LA DERIVADA EN EL ANÁLISIS DE ECUACIONES****1. TEOREMA DEL VALOR MEDIO**

Dada la función  $f$  continua y derivable en  $[a; b]$ ; entonces:



$\exists x_0 \in (a, b)$  tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Ejemplo 1**

Sea la función:

$$f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

tal que tiene una raíz  $x_0$ ; donde  $x_0 \in <0; 1>$ , si se cumple que:

$$\frac{a_0}{5} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{2} + a_4 = k$$

Determine el valor de  $k$ .

**Resolución:**

Asumimos la función:

$$g(x) = \frac{a_0x^5}{5} + \frac{a_1x^4}{4} + \frac{a_2x^3}{3} + \frac{a_3x^2}{2} + a_4x$$

Aplicamos el teorema del valor medio en el intervalo  $<0, 1>$  para  $g(x)$  se tiene  $\exists x_0 \in <0; 1>$  tal que:

$$g'(x_0) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} \dots\dots (\alpha)$$

Pero observamos que  $g'(x_0) = f(x_0)$  y como  $x_0$  es raíz de  $x_0$  entonces:

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow g'(x_0) = 0$$

Reemplazando en  $(\alpha)$

$$g(1) - g(0) = 0$$

$$g(1) = g(0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{a_0}{5} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{2} + a_4}_{= k} = 0$$

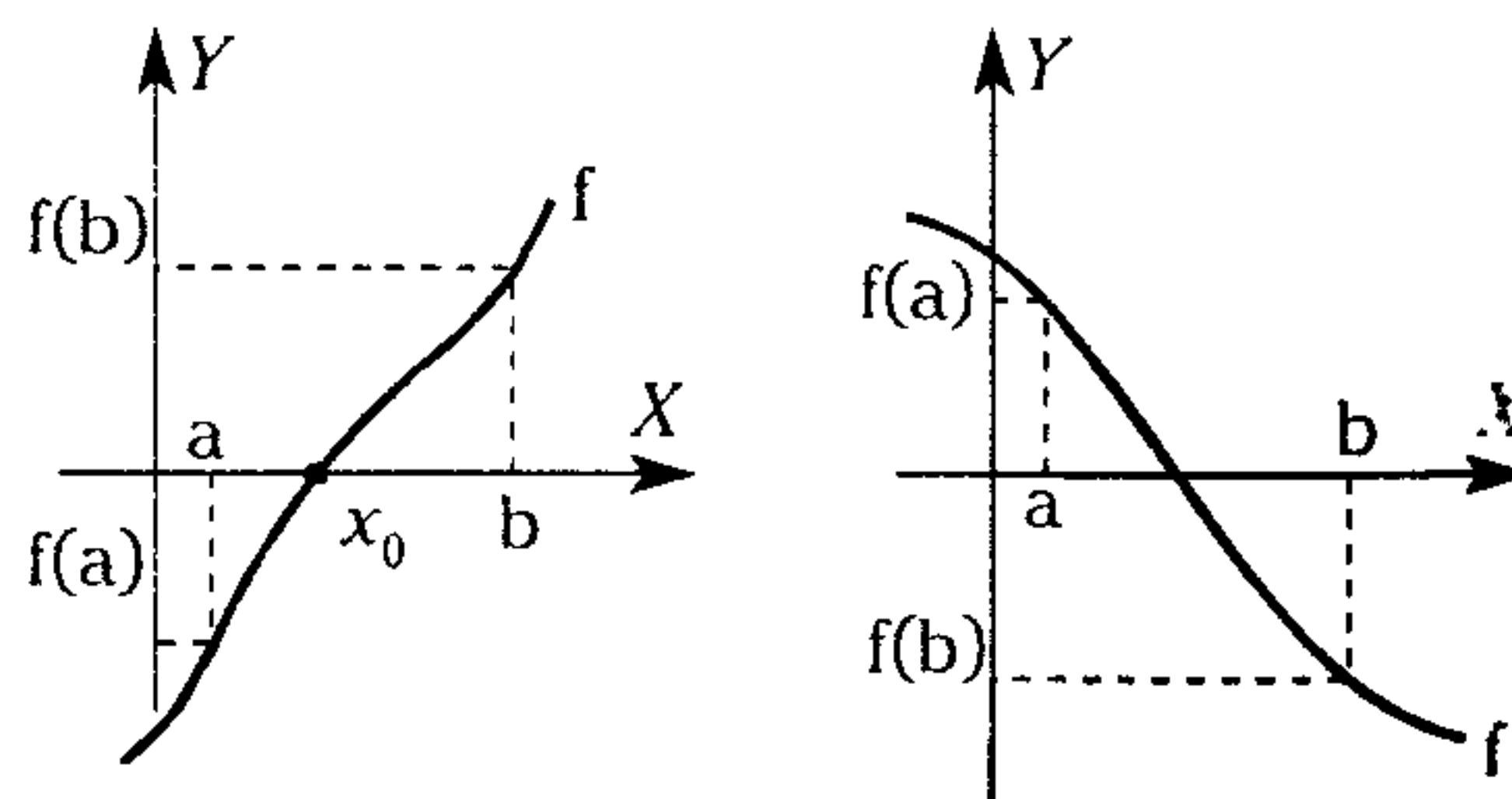
**2. TEOREMA DEL CERO**

Sea la función  $f$  continua en el intervalo:  $<a, b>$  se cumple que si:

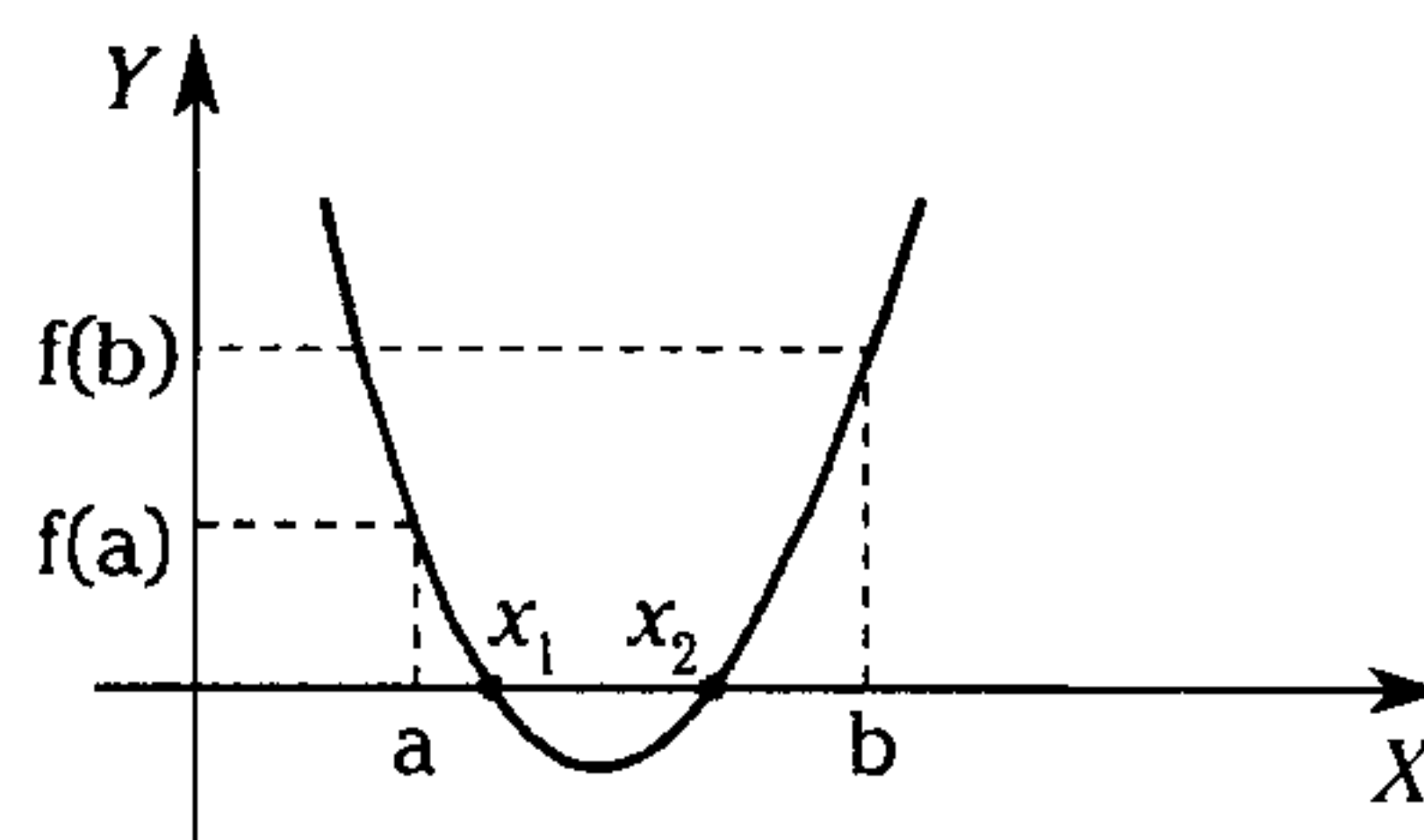
$$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in <a; b>$$

tal que  $f(x_0) = 0$

Gráficamente:



El hecho que  $f(a) \times f(b) > 0$ , no quiere decir que no existe una raíz en  $<a; b>$  porque se puede dar:



Tenemos  $f(a)f(b) > 0$  y vemos dos raíces:  $x_1; x_2$  en  $<a; b>$

**Ejemplo 1**

Hallar una raíz de la función  $f(x) = 2x^5 + x - 1$ , en forma aproximada.

**Resolución:**

Se observa que:

$$f(0) = -1$$

$$f(1) = 2$$

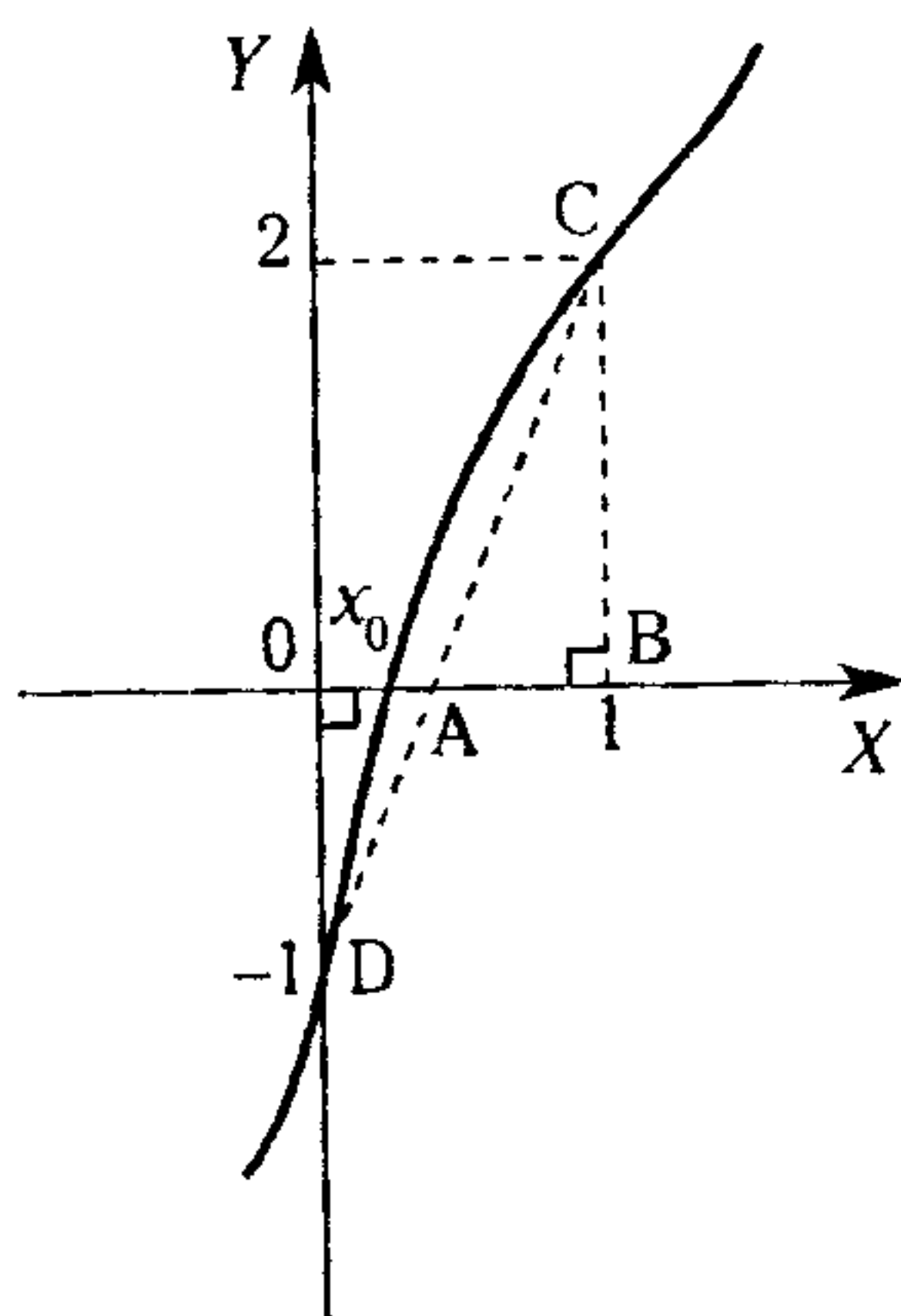
Por el teorema del cero se tiene:

Como  $f(0) \cdot f(1) < 0$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in <0, 1> / f(x_0) = 0$$



Graficando se tiene:



Aproximando la raíz  $x_0$  estableciendo una semejanza entre los triángulos  $\triangle DOA \sim \triangle BAC$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{2}{1-x_0}$$

$$\Rightarrow 1-x_0 = 2x_0 \Rightarrow 1 = 3x_0 \Rightarrow x_0 \approx \frac{1}{3}$$

### 3. TEOREMA DE LA RAÍZ MÚLTIPLE

Si  $\alpha$  es una raíz de multiplicidad  $k$  de la función  $f(x)$  se cumple:

$$f(\alpha) = 0 \wedge f'(\alpha) = 0 \wedge f''(\alpha) = 0 \\ \wedge f'''(\alpha) = 0 \wedge \dots \wedge f^{k-1}(\alpha) = 0$$

Donde:  $f_{(x)}^{k-1} = 0$  es la derivada de orden  $(k-1)$  de  $f(x)$ .

#### Ejemplo

Si la ecuación:  $f(x) = x^5 + ax + b$ ; tiene como raíz doble a 1.

Calcular  $(a+b)$

#### Resolución:

Tenemos:  $f(x) = x^5 + ax + b$

Como 1 es raíz doble se cumple:

$$f(1) = 0 \wedge f'(1) = 0$$

$$f(x) = x^5 + ax + b \Rightarrow 1 + a + b = 0 \dots (\alpha)$$

$$f'(x) = x^5 + ax + b \Rightarrow 5 + a = 0 \\ a = -5$$

$$\text{En } (\alpha): b = 4$$

$$\therefore a + b = -1$$

### 4. SUMA DE LAS POTENCIAS DE LAS RAÍCES

Se tiene la función polinomial  $f(x)$  y  $f'(x)$  su

derivada al efectuar la división  $\frac{f'(x)}{f(x)}$ , por Horner se tiene:

$$\begin{array}{r|l} f'(x) & \\ \hline f(x) & a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n \quad \dots \end{array}$$

donde:

$$a_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + \dots + x_n^0$$

$$a_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

$$a_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$$a_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + \dots + x_n^n$$

$$\vdots$$

donde  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , son raíces de  $f(x)$  que es de grado  $n$ .

#### Ejemplo

Si:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  son raíces de:  $x^5 + x + 1 = 0$ .

Calcular:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4$$

**Resolución:**

Sea:

$$f(x) = x^5 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 1$$

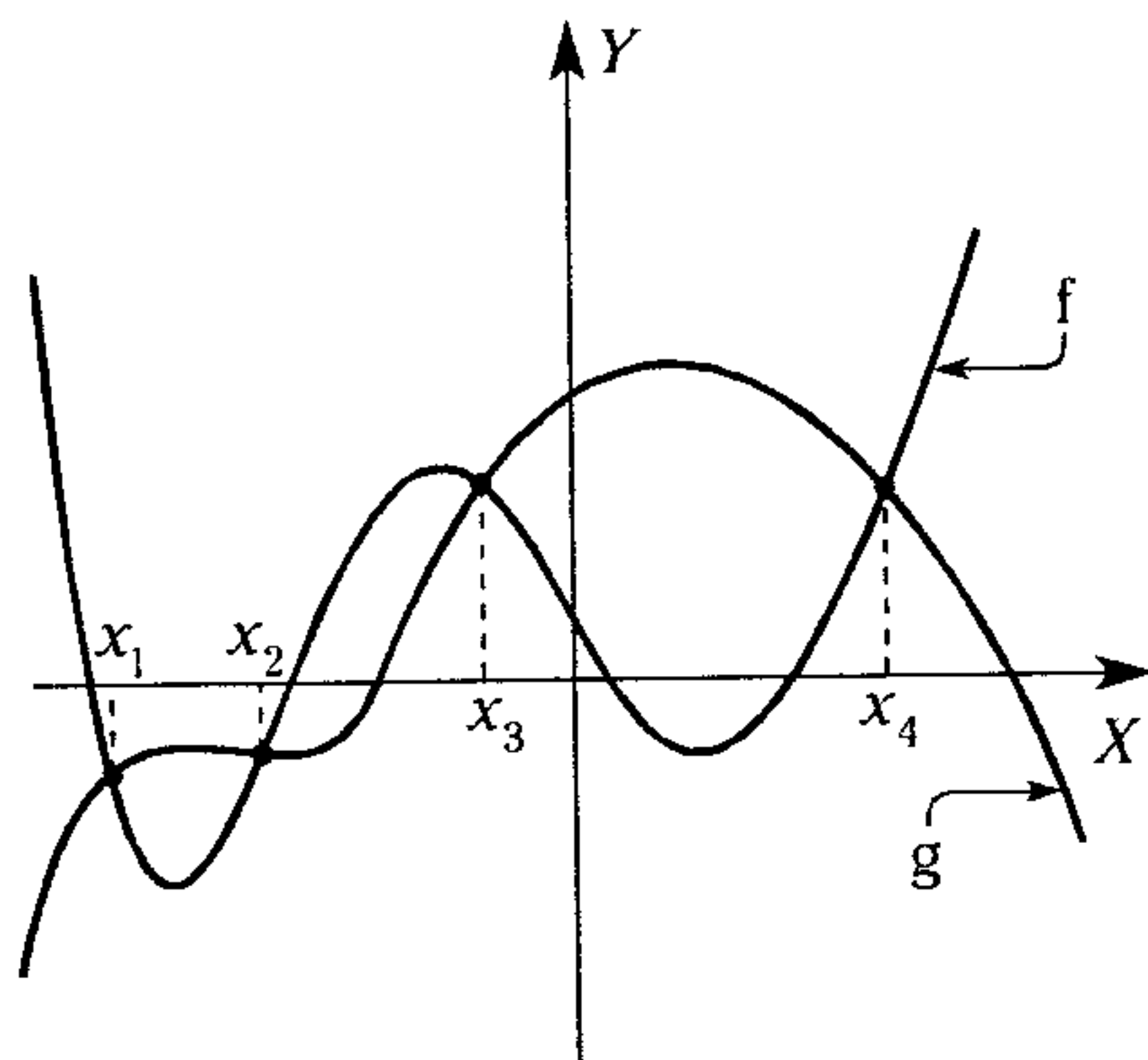
dividiendo  $\frac{f'(x)}{f(x)}$ , por Horner.

	5	0	0	0	1	
0		0	0	0	-5	-5
0			0	0	0	0
0				0	0	0
-1				0	0	0
-1					0	0
	5	0	0	0	-4	-5
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$

$$\Rightarrow a_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4 = -4$$

**5. SOLUCIONES REALES**

Dadas las funciones  $f$  y  $g$  cuyas gráficas son:



El número de intersecciones de sus gráficas  $f$  y  $g$  nos indican el número de soluciones reales de la ecuación  $f(x) = g(x)$ .

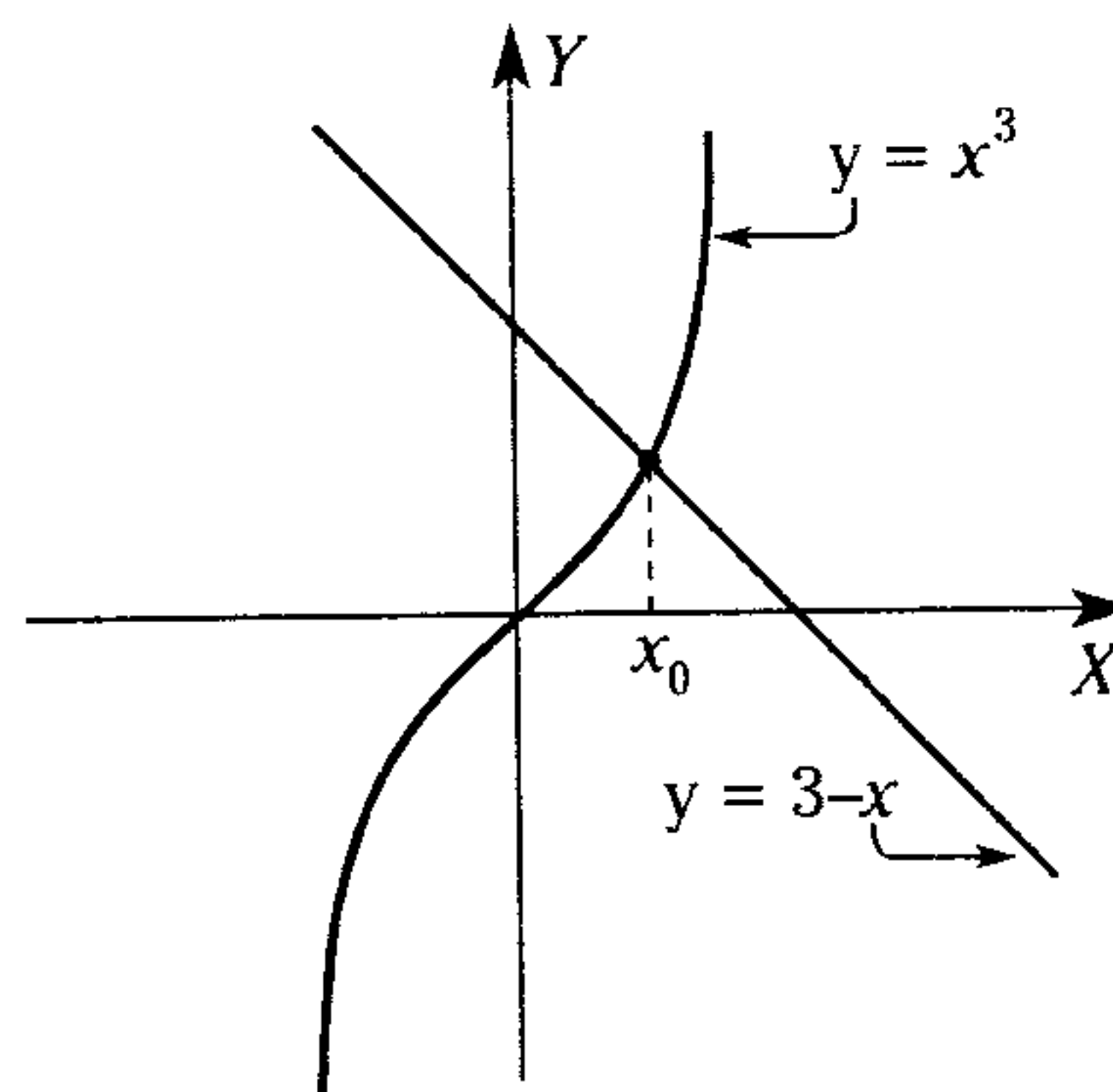
**Ejemplo**

Indique el número de soluciones reales de la ecuación  $x^3 + x - 3 = 0$

**Resolución:**

Tenemos:  $x^3 = 3 - x$

Graficando ambos miembros tenemos:



Se observa que la ecuación tiene una sola solución real.

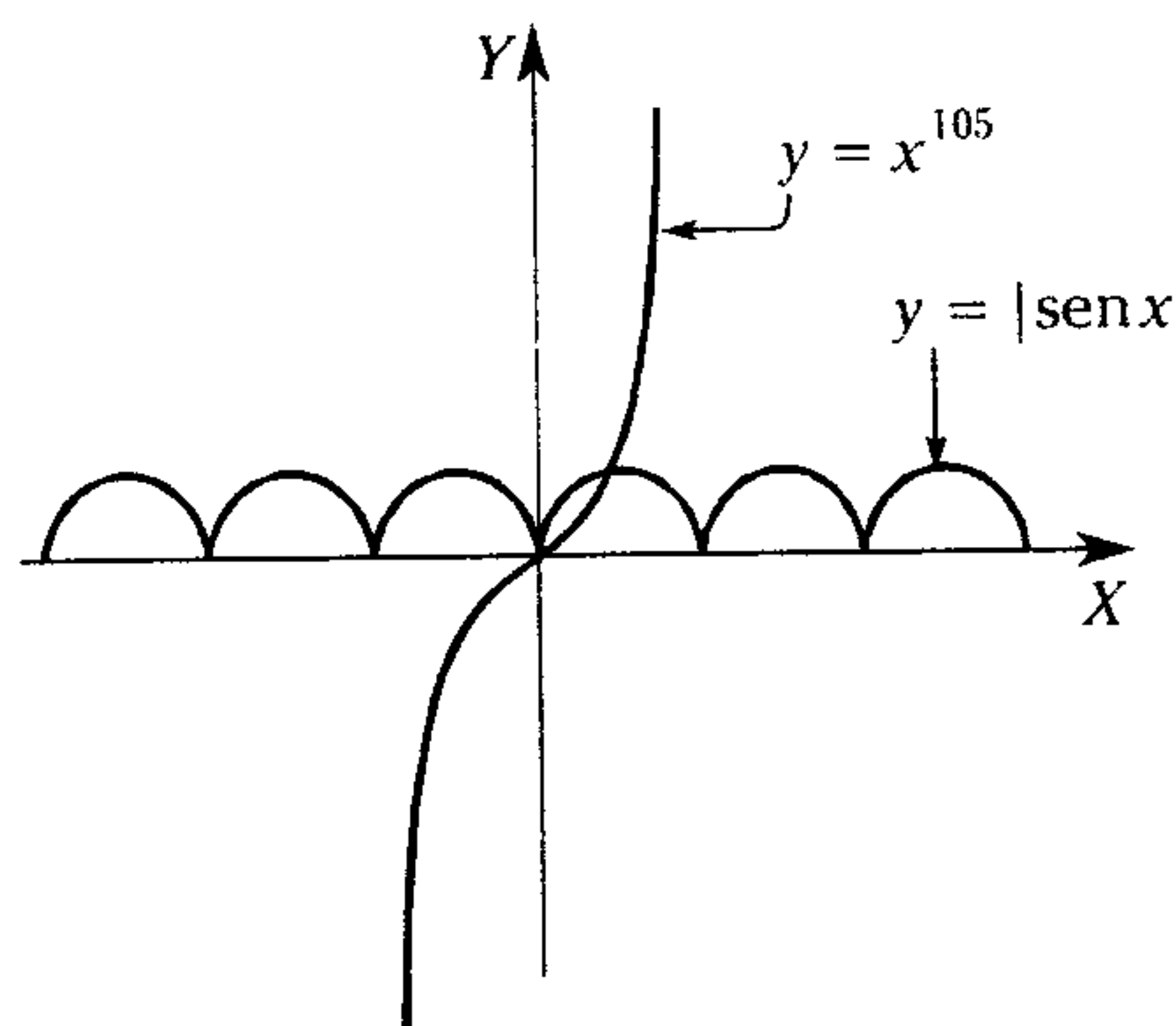
**Ejemplo 2**

Indique el número de soluciones reales de la ecuación  $x^{105} - |\sin x| = 0$

**Resolución:**

Tenemos:  $x^{105} = |\sin x|$

Graficando ambos miembros tenemos:



Se observa que la ecuación tiene 2 soluciones reales.

# DERIVADAS PARCIALES

Sea  $f$  una función en dos o más variables.  
Tenemos  $f$  una función de tres variables:

$$w = f(x, y, z)$$

Se tiene:

$\frac{\partial f}{\partial x}$  derivada parcial de  $f$  respecto a  $x$ .

$\frac{\partial f}{\partial y}$  derivada parcial de  $f$  respecto a  $y$ .

$\frac{\partial f}{\partial z}$  derivada parcial de  $f$  respecto a  $z$ .

Para obtener las derivadas parciales de una función respecto a una variable en referencia; las demás variables se asumen como si fueran constantes. Las derivadas parciales tienen aplicación en matemáticas superiores como, por ejemplo, en la resolución de ecuaciones diferenciales.

## Ejemplo 1

Dada la función:  $f(x, y) = 3x^2y^5 + 2x^6y^2$

Hallar  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$

**Resolución:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^5 + 12x^5y^2$$

La variable  $y$  se comporta como una constante.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 30xy^4 + 24x^5y$$

La variable  $x$  se comporta como una constante.

## Ejemplo 2

Obtener las derivadas parciales de la función:

$$f(x, y, z) = 3x^2yz^7 - \frac{1}{7}y^3z$$

**Resolución:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xyz^7 - \frac{1}{7}y^3z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2z^7 - \frac{3}{7}xy^2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 21x^2yz^6 - \frac{1}{7}xy^3$$

# DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Nos permite derivar una función sin necesidad de despejar  $y$  en función de  $x$ .

Para realizar este proceso se debe tener en cuenta algunos aspectos, como por ejemplo:

- $xy = x^2 \Rightarrow 1 \cdot y + xy' = 2x$
- $xy^3 = 2x^{1/3} \Rightarrow 1 \cdot y^3 + x(3y^2 \cdot y') = \frac{2}{3}x^{-2/3}$

## Ejemplo 1

Dada la siguiente relación:  $xy^2 + x^2y = 2$

Halle:  $y'$ , cuando  $x=1$

**Resolución:**

Como  $xy^2 + x^2y = 2$

Derivando ambos miembros:

$$y^2 + x(2yy') + 2xy + x^2y' = 0$$

Como  $x=1$ , entonces  $y=1$

Reemplazando:  $1 + 2y' + 2 + y' = 0 \Rightarrow y' = -1$

## Ejemplo 2

Halle la pendiente de la recta tangente a la curva:

$xy^3 + 2xy = 3$  cuando  $x=1$

**Resolución:**

De la condición:  $xy^3 + 2xy = 3$

Derivando ambos miembros:

$$y^3 + x(3y^2y') + 2y + 2xy' = 0$$

como  $x=1$ , entonces  $y=1$

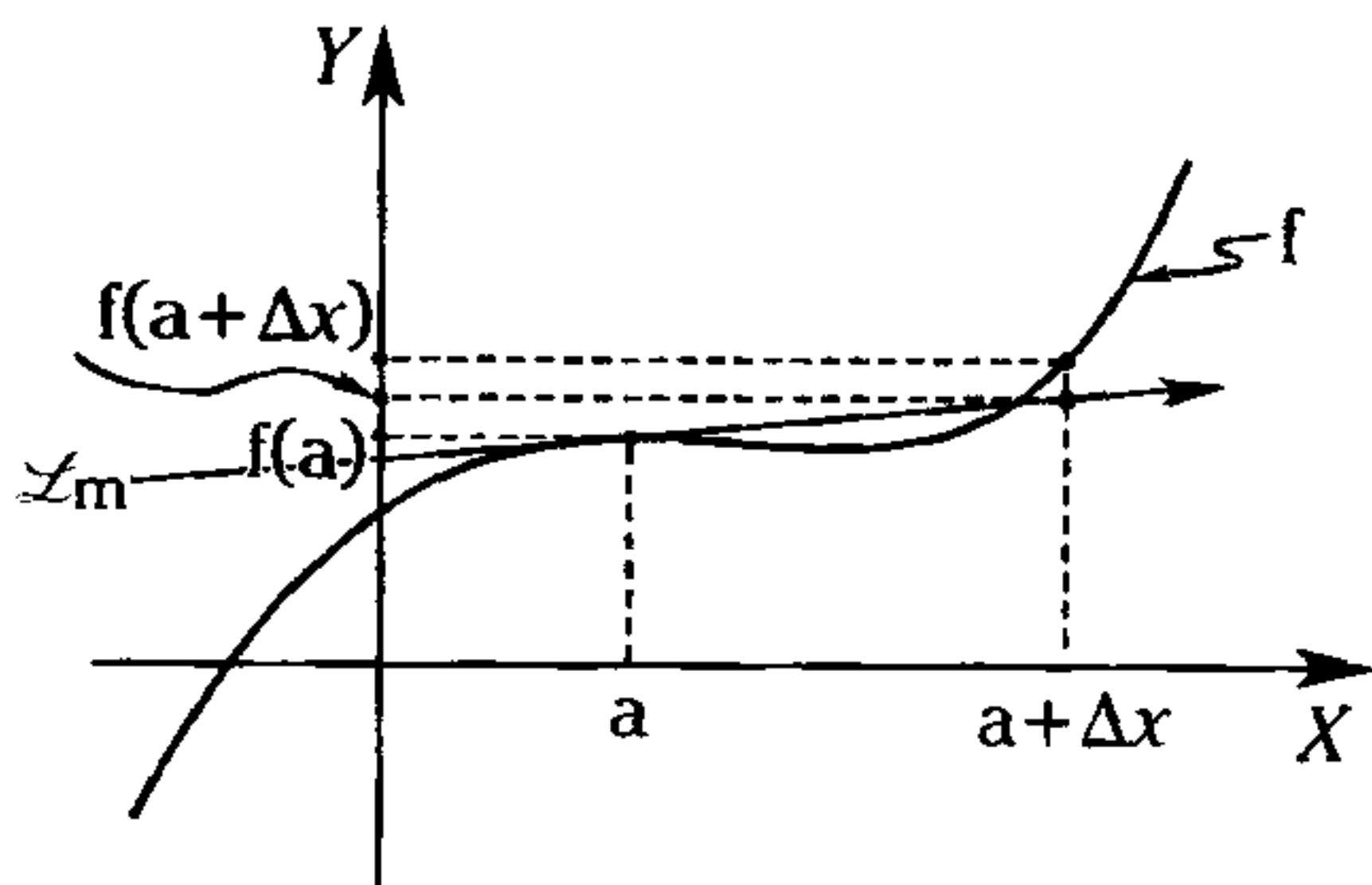
Reemplazando:  $1 + 3y' + 2 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{3}{5}$

$\therefore$  la pendiente es  $-\frac{3}{5}$



# DIFERENCIALES

Sea  $f$  una función definida sobre un intervalo abierto que contiene a " $a$ ".  
Tratemos de aproximar las ordenadas  $f(x)$  cercanos a " $a$ ". Usemos una función lineal por ser lo más simple:



$\mathcal{L}_m: y = f(a) + m(x-a)$ ;  $m$ : pendiente

(ecuación punto pendiente de  $\mathcal{L}_m$ )

En  $x=a+\Delta x$  la ordenada mediante  $t$  es aproximadamente la ordenada según la recta  $\mathcal{L}_m$  ( $a+\Delta x$ ), o sea:

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + m(a+\Delta x - a)$$

Es decir:  $f(a+\Delta x) \approx f(a) + m\Delta x$

**Ejemplo:**

Dado  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , calcular aproximadamente  $f(8,1)$  usando una recta de pendiente  $(1/3)$ .

**Resolución:**

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$a=8; \Delta y = 0,1 = \frac{1}{10}; m = \frac{1}{3}$$

Sabemos que:  $f(a+\Delta x) \approx f(a) + m \cdot \Delta x$

$$\Rightarrow f\left(8 + \frac{1}{10}\right) \approx f(8) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10}$$

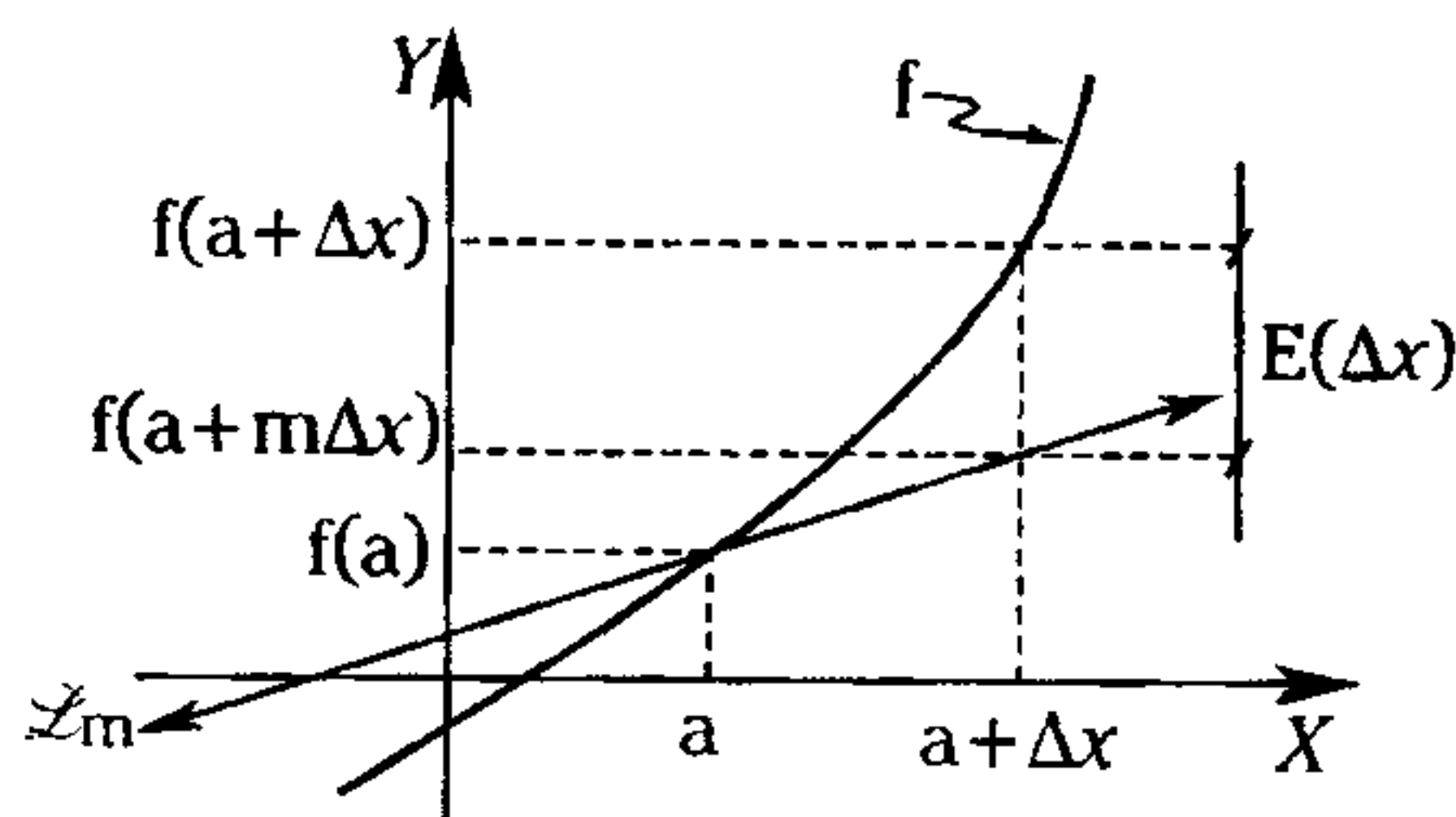
$$\Rightarrow f(8,1) \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{30} = \frac{61}{30}$$

$$\Rightarrow f(8,1) \approx 20,033$$

$$\therefore \sqrt[3]{8,1} \approx 2,033$$

¿Cuál debe ser la pendiente de  $\mathcal{L}_m$  para conseguir una aproximación óptima de  $f(x)$  para valores de  $x$  cercanos a " $a$ "?

Consideremos el error  $E(\Delta x)$ , pues depende de  $\Delta x$ , al hacer nuestra aproximación. Tratemos de minimizarlo.



$$E(\Delta x) = f(a + \Delta x) - (f(a) + m \cdot \Delta x)$$

$$= f(a + \Delta x) - f(a) - m \cdot \Delta x$$

Vemos que cuando  $\Delta x$  tiende a cero  $E(\Delta x)$  también tiende a cero.

Esto significa que para valores muy próximos a " $a$ " cualquier recta da una buena aproximación.

Consideremos  $\frac{E(\Delta x)}{\Delta x}$ . Esta fracción nos hace saber cómo es el error en la aproximación para cada valor del incremento  $\Delta x$ .

$$\frac{E(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a) - m\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{E(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - m$$

Para la aproximación óptima:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{E(\Delta x)}{\Delta x} = 0$

Tenemos que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - m \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right] - m = 0$$

$$\Rightarrow f'(a) - m = 0$$

$$\Rightarrow m = f'(a)$$

En conclusión, la aproximación de  $f$  en los valores cercanos a " $a$ " mediante una recta se hace óptima cuando  $f$  es derivable en " $a$ " y dicha recta tiene por pendiente a  $f'(a)$ . Es decir, hablamos de la recta tangente a  $f$  en  $x=a$ .

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

### Definición (diferencial o incremento de $f$ )

El diferencial de  $f$  en  $x=a$  correspondiente al incremento  $\Delta x$  viene dado por:

$$df(a) = f'(a) \cdot \Delta x$$



1. Una función es diferenciable en  $x=a$  si existe el  $f'(a)$ .
2. Si para todo  $x \in A$  existe  $f'(x)$ , decimos que  $f$  es diferenciable en  $A$ .
3. Ya vimos que  $f$  es diferenciable en " $a$ " si y sólo si  $f$  es derivable en " $a$ ".
4. Sea  $d$  diferenciable en  $x \forall x \in A$

$$\Rightarrow df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

### Ejemplo 1

$$\text{Si } f(x) = x^3$$

$$\Rightarrow df(x) = 3x^2 \cdot \Delta x$$

$$\text{es decir } d(x^3) = 3x^2 \cdot \Delta x$$

### Ejemplo 2

$$\text{Si } f(x) = x$$

$$\Rightarrow df(x) = 1 \cdot \Delta x$$

$$\text{es decir: } dx = \Delta x$$

$$\text{Luego: } d(x^3) = 3x^2 \cdot dx$$

$$\text{En general: } df(x) = f'(x) \cdot dx$$

### Ejemplo 3

Dado  $f(x) = x^2$ , calcular  $\Delta f$ , si  $\Delta x = 0,3$  y  $x = 3$

### Resolución:

$$\text{Sabemos: } \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= f(3 + 0,3) - f(3)$$

$$= f(3,3) - f(3)$$

$$= (3,3)^2 - 3^2$$

$$= 1,89$$

### Ejemplo 4

Si la longitud del radio de un círculo es 8,25 m. En cuánto se incrementa su área, si el radio se incrementa en 0,05 m.

### Resolución:

$$\text{El área del círculo es: } A(r) = \pi r^2$$

$$\text{Como } r_0 = 8,25 \text{ y } \Delta r = 0,05$$

$$\Rightarrow \Delta A = A(r_0 + \Delta r) - A(r_0)$$

$$= A(8,3) - A(8,25)$$

$$= \pi (8,3)^2 - \pi (8,25)^2$$

$$= 0,8275 \pi \text{ m}^2$$

### Ejemplo 5

Calcular en forma aproximada  $\sqrt[5]{3127}$

### Resolución:

$$\text{Asumimos } f(x) = \sqrt[5]{x}$$

$$\text{donde: } a = 3125, f(a) = \sqrt[5]{3125} = 5$$

$$\text{Como: } f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)dx$$

$$f(3125 + 2) = f(3125) + f'(3125)(2)$$

Tener en cuenta que:

$$f'(x) = \frac{1}{5} x^{-4/5}$$

$$\Rightarrow f'(3125) = \frac{1}{5} (3125)^{-4/5} = \frac{1}{3125}$$

$$\therefore f(3127) = 5 + \frac{1}{3125}(2)$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{3127} = 5,00064$$

# CÁLCULO INTEGRAL

En el capítulo de derivadas a partir de una función se obtiene su derivada, a ello se llama CÁLCULO DIFERENCIAL. Ahora el problema es que a partir de la derivada se debe obtener la función, a esto se conoce como CÁLCULO INTEGRAL.

## INTEGRAL INDEFINIDA

Consideremos un problema donde a partir de la derivada se busca hallar la función.

Consideremos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Por conceptos de derivada sabemos que una de las funciones cuya derivada es  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ; puede

ser:  $y = x^3$ . Igualmente se puede ver que existen otras funciones con esta propiedad como son:

$$y = x^3 + 1; \quad y = x^3 + \frac{1}{2} \quad \text{en general } y = x^3 + c; \text{ donde}$$

“c” es una constante arbitraria para denotar la operación de encontrar la función general de donde proviene la derivada.

Se utiliza el símbolo:  $\int$  que se llama una **integral** o **símbolo de integración**.

En general:

Si:  $\frac{d(F(x)+c)}{dx} = f(x)$

denotamos  $\int f(x) dx = F(x) + c$

y se lee: “la integral de  $f(x)$ , diferencial de  $x$  es:  $F(x) + c$ ”.

La función  $f(x)$  se llama integrando;  $dx$  indica la variable en términos de la cual debe darse la función resultante.

$F(x) + c$ , se llama la integral de  $f(x)$ ; donde  $c$  es una constante de integración en nuestro ejemplo:

$$\int (3x^2) dx = x^3 + c$$

### Ejemplos

1.  $\int \cos x dx = \sin x + c$

porque:  $\frac{d(\sin x + c)}{dx} = \cos x$

2.  $\int (x^5 + 2x + 3) dx = \frac{x^6}{6} + x^2 + 3x + c$

porque:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^6}{6} + x^2 + 3x + c \right) = x^5 + 2x + 3$$

3.  $\int e^x dx = e^x + c$

porque:  $\frac{d}{dx} (e^x + c) = e^x$

### Ejercicios:

Calcular las integrales indefinidas

1.  $\int x^2 dx$

2.  $\int 3(x+1)^2 dx$

3.  $\int \sin 3x dx$

4.  $\int (\cos x + x^2) dx$

5.  $\int (x^2 + x + 1) dx$

6.  $\int (e^{5x+1}) dx$



## 1. CÁLCULO DE INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN

Mediante la ayuda de propiedades que se conoce de derivadas puesto que la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas, entonces, la integral de una suma de funciones es la suma de las integrales.

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

De manera análoga como la derivada de una constante multiplicada por una función es la constante por la derivada de la función, entonces:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

Se tiene:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right) = x^n$

Por definición de integración como proceso inverso de la diferenciación, entonces:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

También se tiene:  $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$

Entonces:  $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$

esto es si  $x > 0$ ; en general

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x; & x > 0 \\ \ln(-x); & x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto:  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

## Ejemplos:

1.  $\int (x^3 dx + 2x + 3) dx = \int x^3 dx + 2 \int x dx + 3 \int dx =$   
 $= \frac{x^4}{4} + x^2 + 3x + c$

2.  $\int \left( \frac{x^2+1}{x} \right) dx = \int \left( x + \frac{1}{x} \right) dx =$   
 $\int x dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} + \ln x + C$

## Resultados Notables

a)  $\int \sin x dx = -\cos x + c$

b)  $\int \cos x dx = \sin x + c$

c)  $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

d)  $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

e)  $\int e^x dx = e^x + c$

## Ejemplos:

1. Calcular:  $\int \sqrt{x+1} dx$

hacemos:  $x+1 = \mu^2$

$\Rightarrow dx = 2\mu d\mu$

Reemplazando:  $\int 2\mu^2 d\mu = \frac{2}{3} \mu^3 + c$

$\Rightarrow \int \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} \mu^3 + c$

2. Calcular:

$\int \sin^2 x \cos x dx$

hacemos:  $\mu = \sin x$

$\Rightarrow d\mu = \cos x dx$

Reemplazando:  $\int \mu^2 d\mu = \frac{\mu^3}{3} + c$

$\Rightarrow \int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + c$

3. Calcular:  $\int (\sqrt{1+\sin x} \cos x + x\sqrt{x^2+1}) dx$   
 $= \underbrace{\int \sqrt{1+\sin x} \cos x dx}_{(a)} + \underbrace{\int x\sqrt{x^2+1} dx}_{(b)}$

a) Hacemos:  $1+\sin x = \mu^2$

$\Rightarrow \cos x dx = 2\mu d\mu$

Reemplazando:

$\int 2\mu^2 d\mu = \frac{2\mu^3}{3} + c_1 = \frac{2}{3} \sqrt{1+\sin x}^3 + c_1$

b) Hacemos:  $x^2 + 1 = t^2$

$$2x dx = 2t dt$$

Reemplazando:

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c_2 = \frac{\sqrt{x^2 + 1}^3}{3} + c_2$$

Luego reponiendo (a) y (b)

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{1 + \sin x} \cos x dx + x\sqrt{x^2 + 1}) dx &= \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{1 + \sin x}^3 + \frac{\sqrt{x^2 + 1}^3}{3} + c \end{aligned}$$

### Ejercicios:

Calcular las integrales:

1.  $\int \left( x^2 + 1 + \frac{2}{x} \right) dx$

2.  $\int \frac{\sqrt{x} + x}{x} dx$

3.  $\int (\cos x + \csc^2 x) dx$

4.  $\int \frac{dx}{x+1}$

5.  $\int (\cos x + e^{2x+7}) dx$

6.  $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$

## 2. CÁLCULO DE INTEGRALES POR PARTES

Escribamos la fórmula para derivar un producto:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Multiplicando por  $dx$

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$\Rightarrow u dv = d(uv) - v du$$

Integrando ambos miembros

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

$$\Rightarrow \boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Es la fórmula de la integración por partes.

### Ejemplos:

1. Calcular:  $\int x e^x dx$

$$\begin{aligned} \text{Sea: } u &= x & dv &= e^x dx \\ du &= dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + c \end{aligned}$$

2. Calcular:  $\int e^x \sin x dx$

$$\begin{aligned} \text{Sea: } u &= \sin x & dv &= e^x dx \\ du &= \cos x dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{(\alpha)}$$

Calculamos la parte  $(\alpha)$  por partes:

$$\begin{aligned} u &= \cos x & dv &= e^x dx \\ du &= -\sin x dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int -e^x \sin x dx$$

Reemplazado  $(\alpha)$ :

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx)$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} \sin x - \frac{e^x}{2} \cos x$$



Tener en cuenta las siguientes relaciones.

$$\int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + c$$

$$\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + c$$

$$\int e^u \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + c$$

$$\int u^n e^{au} du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$$

**INTEGRAL DEFINIDA**

Se llama integral definida de una función  $[a;b]$  a la integral:

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a)$$

donde:  $g'(x) = f(x)$

a y b se llaman límites de integración.

**TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO**

Si  $y = f(x)$  es una función continua en  $[a;b]$  entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

donde  $F'(x) = f(x)$

**PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN CONTINUA**

Sean  $f(x)$ ,  $g(x)$  dos funciones continuas en  $[a;b]$ , entonces:

1.  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
2.  $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  ; k cte. real
3.  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$   $c \in [a;b]$
4.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

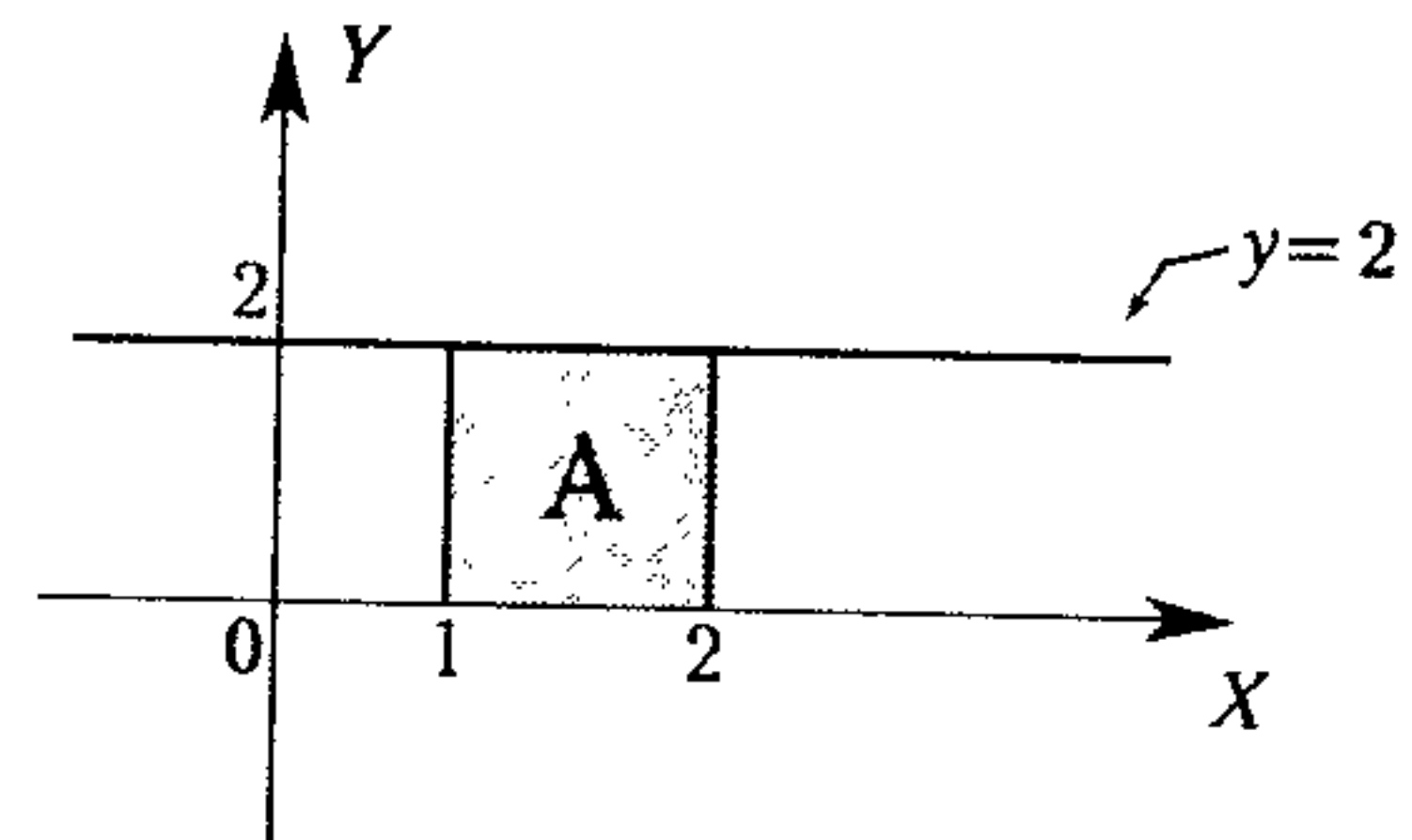
**Ejemplo 1**

Halle la integral definida de la función:  $f(x)=2$  en el intervalo:  $I=[-1;2]$

**Resolución:**

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^2 2 dx = 2x \Big|_{-1}^2 = 2(2) - 2(-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Graficamente vemos:



Vemos que:  $\int_1^2 f(x) dx = \text{ÁREA} = 1 \times 2$

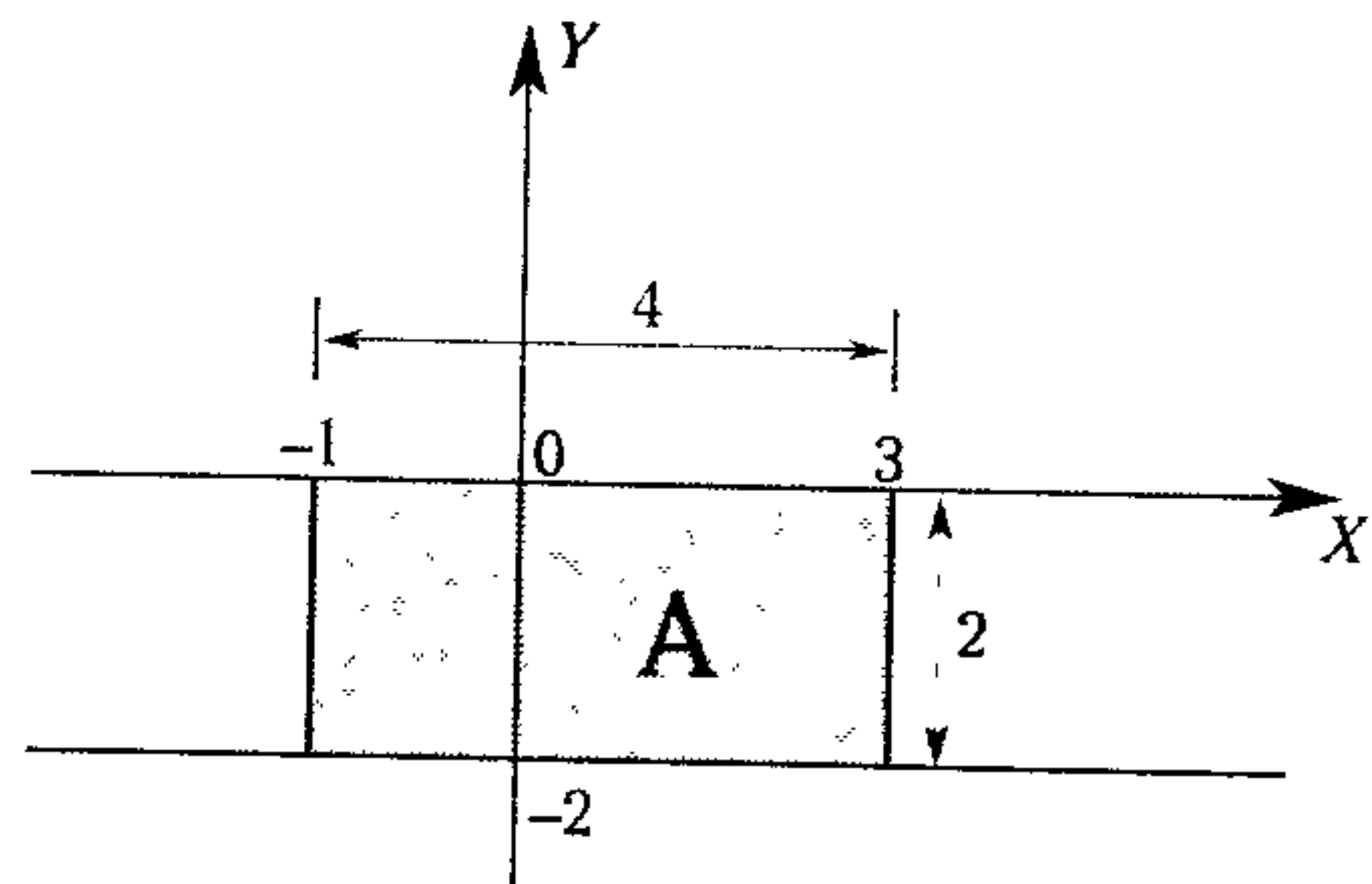
**Ejemplo 2**

Halle la integral definida de la función  $f(x)=-2$ ; en el intervalo:  $I=[-1;3]$

**Resolución:**

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^3 (-2) dx \\ &= -2x \Big|_{-1}^3 = -2(3) - (-2(-1)) = -8 \end{aligned}$$

Gráficamente vemos:



$$A = 2(4) = 8$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^3 f(x) dx = -A = -8$$

En general:

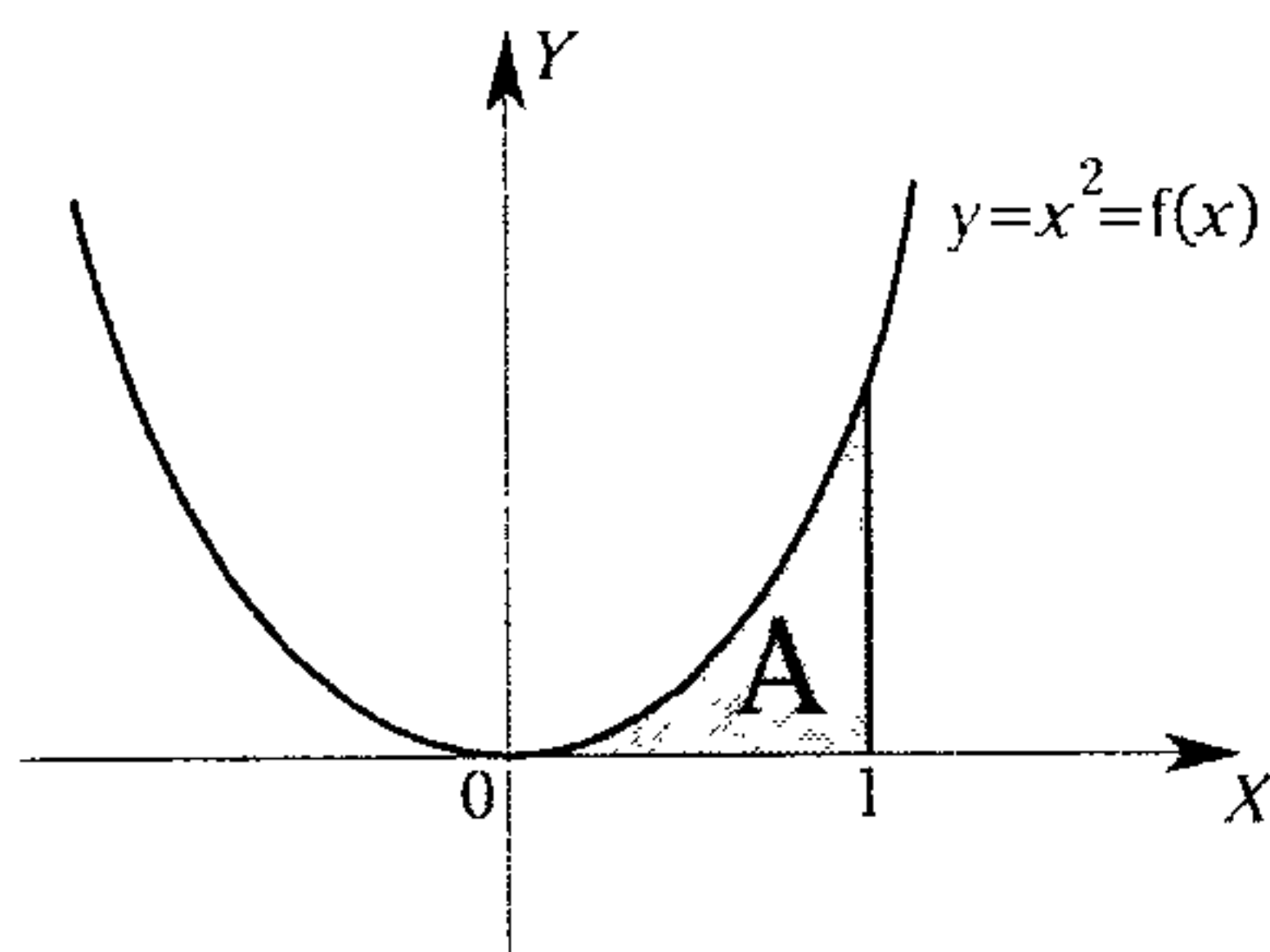
$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

“A” es el área limitada por la curva y el eje X en el intervalo  $[a;b]$ ; donde la función debe ser continua.



**Ejemplo 3**

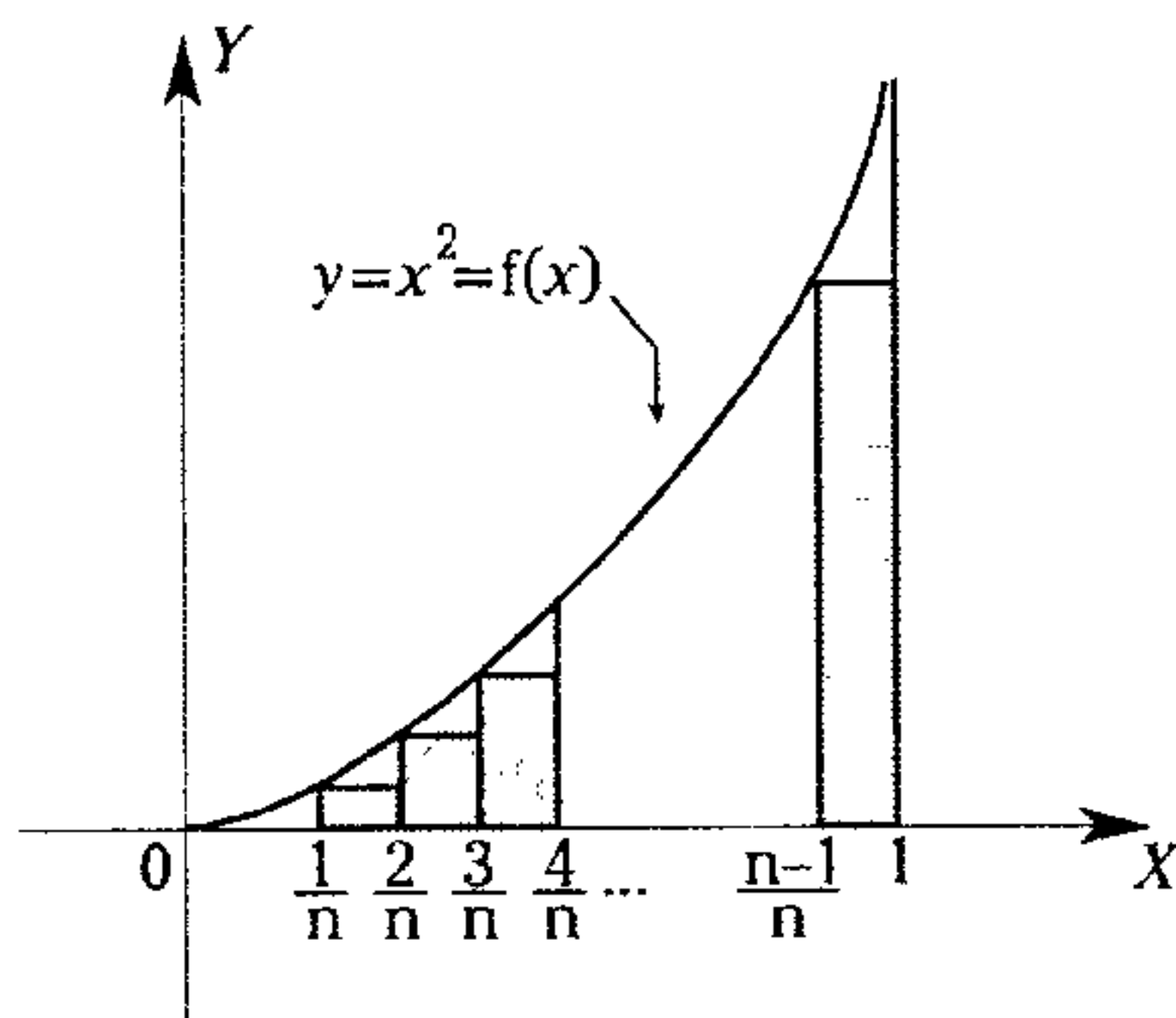
Calcular el área limitada por la curva:  $y=x^2$  y el eje  $X$  en el intervalo:  $[0;1]$

**Resolución:**

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$= \frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{1}{3} \mu^2$$

A continuación vamos a comprobar el resultado mediante límites utilizando la suma de Riman.



Dividimos el intervalo:  $[0;1]$  en “n” subintervalos de igual amplitud, por lo tanto, la longitud de cada subintervalo es  $\frac{1}{n}$ . Los valores mínimos en cada subintervalo son:

$$c_1 = f(0) = 0$$

$$c_2 = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$$

$$c_3 = f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2^2}{n^2}$$

$$\vdots$$

$$c_n = f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2}$$

Ahora sumamos las áreas de todos los rectángulos sombreados:

$$S_n = c_1 \left( \frac{1}{n} - 0 \right) + c_2 \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n} \right) + c_3 \left( \frac{3}{n} - \frac{2}{n} \right) + \dots$$

$$\dots + c_n \left( 1 - \frac{n-1}{n} \right)$$

$$S_n = 0 \left( \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{n} \right) + \frac{2^2}{n^2} \left( \frac{1}{n} \right) + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \left( \frac{1}{n} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{n^3} (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2)$$

$$S_n = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$S_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}$$

Si hacemos que:  $n \rightarrow \infty$  obtenemos el área exacta

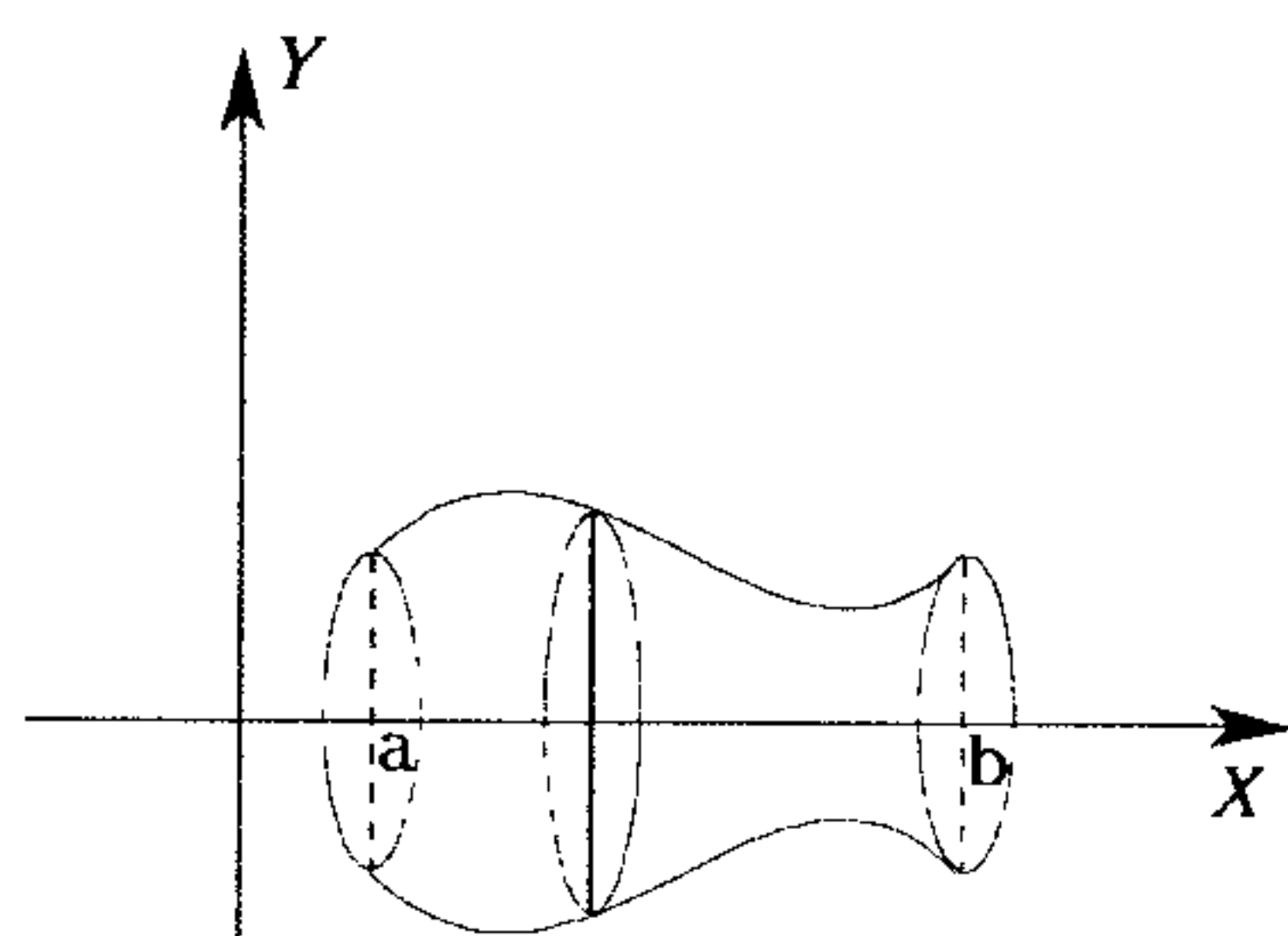
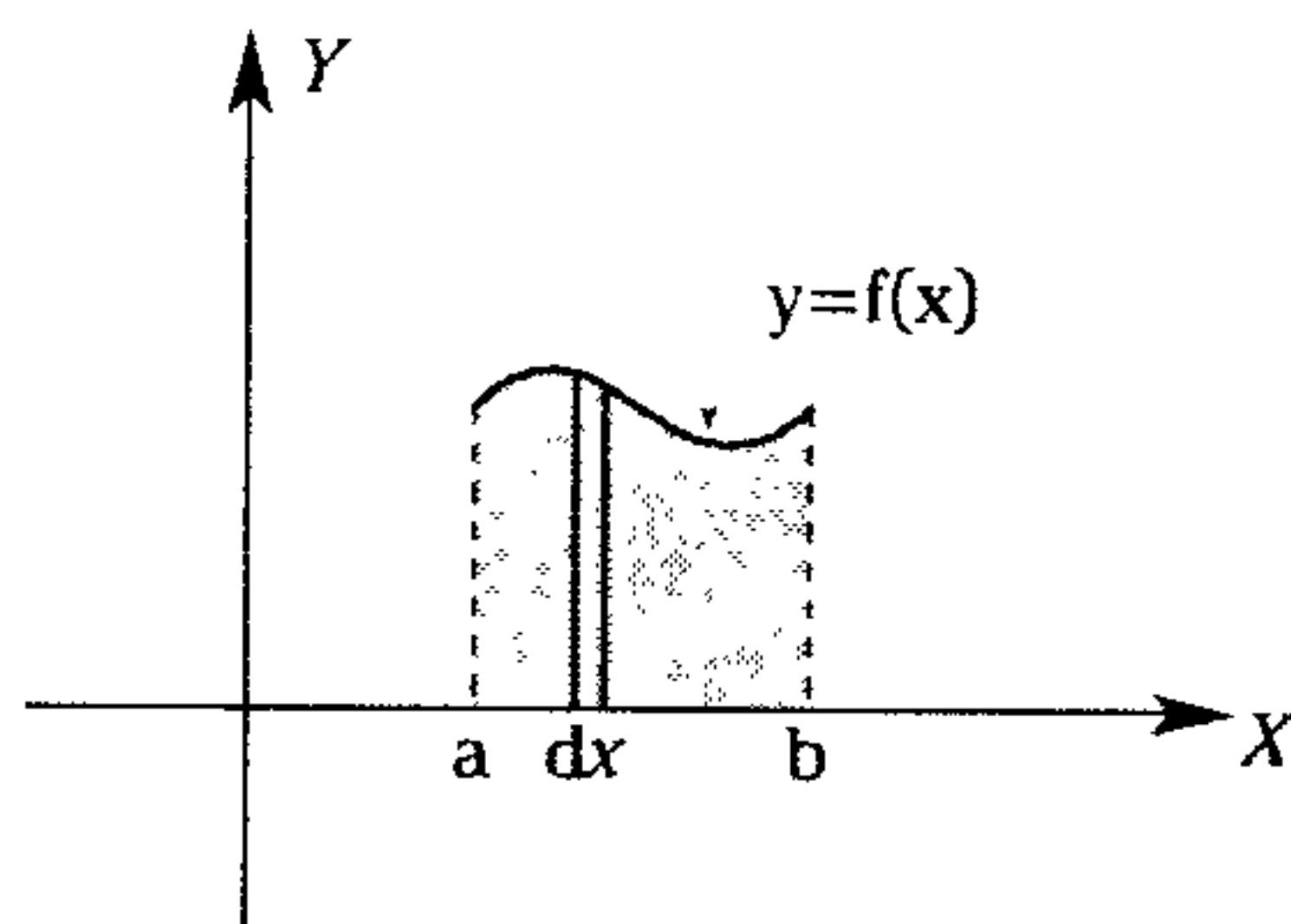
$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left( 2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{3} \mu^2$$

### VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

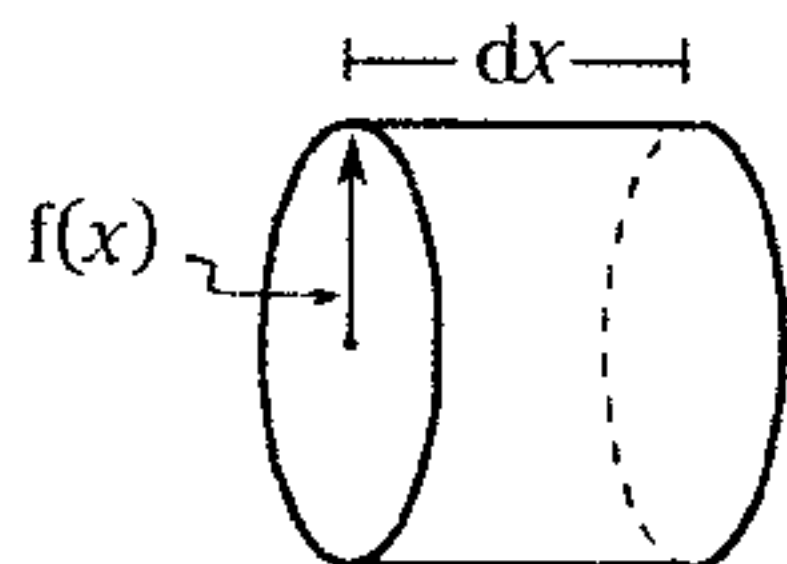
Sea  $f$  una función continua en  $[a;b]$ , "S" el sólido de revolución obtenido por la revolución alrededor del eje  $X$  de la región limitada por la gráfica de " $f$ " y el eje  $X$  en el intervalo:  $[a;b]$  entonces el volumen es:



$$V = \pi \left( \int_a^b [f(x)]^2 dx \right)$$

donde:

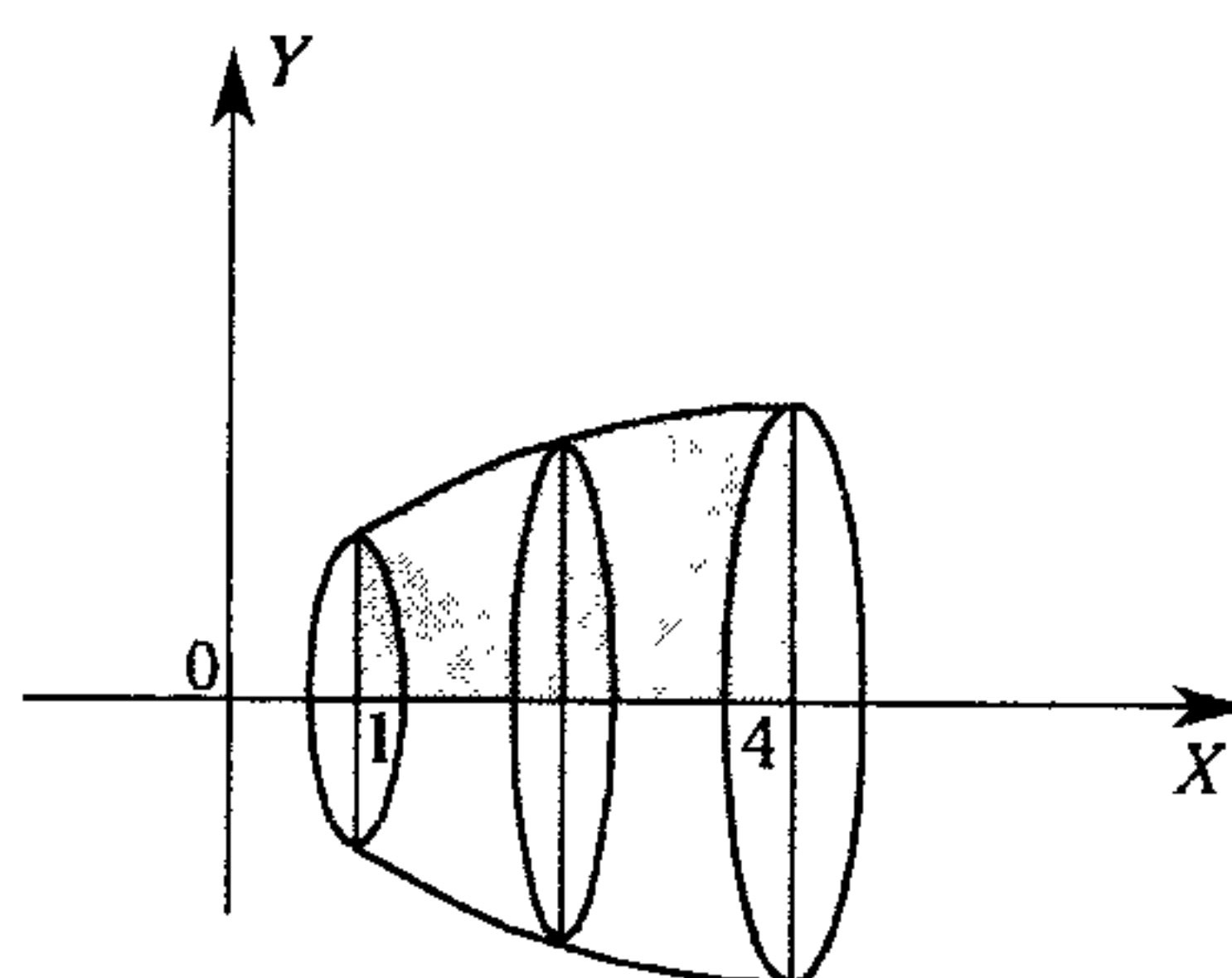
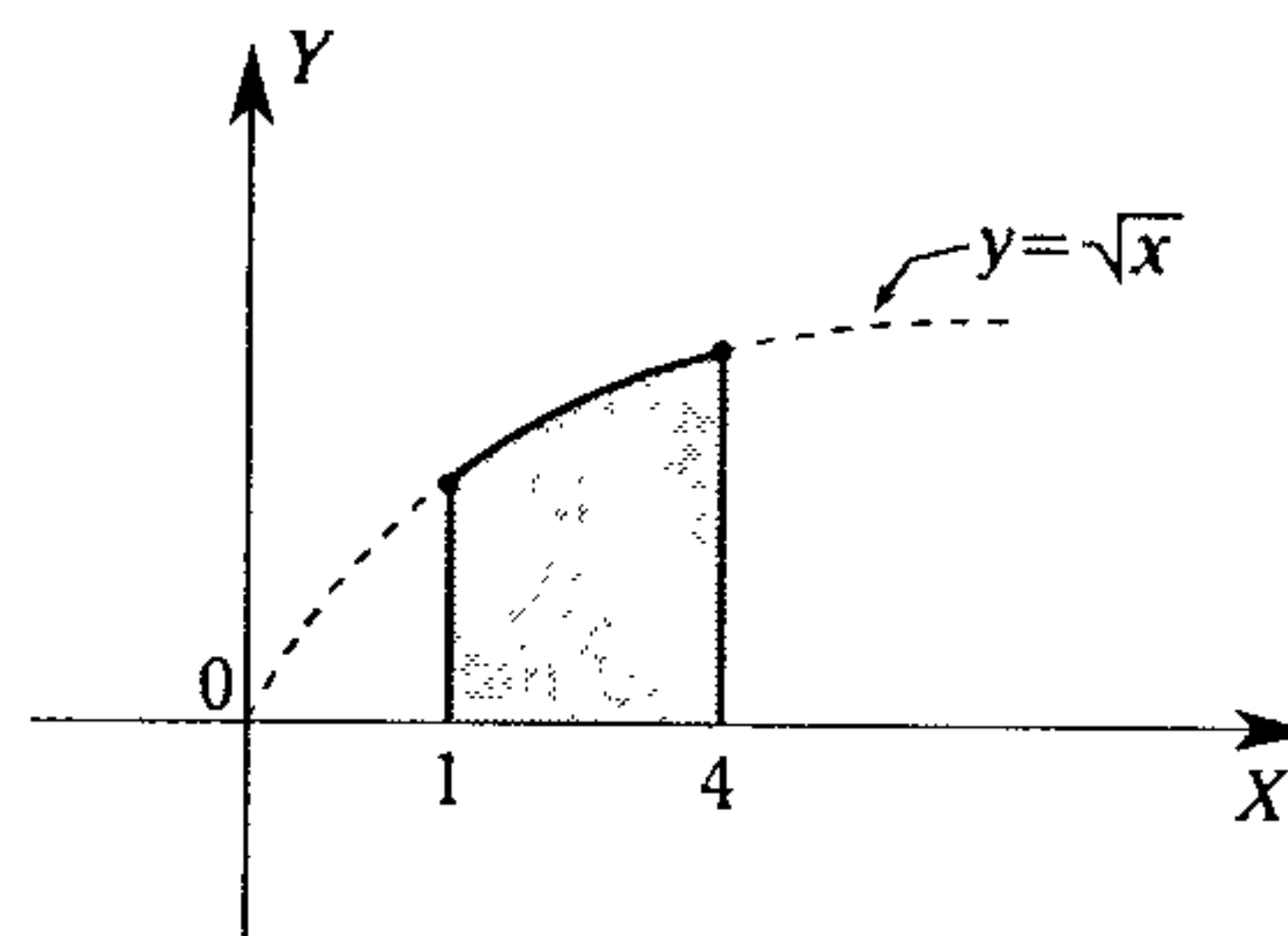
$V_x = \pi(f(x))^2 dx$ ; representa el volumen del cilindro de radio  $f(x)$  y altura  $dx$ .



#### Ejemplo 1

Halle el volumen del sólido que se genera por la rotación de la región limitada por la curva:  $y = \sqrt{x}$  y el eje  $X$  en el intervalo:  $[1;4]$

**Resolución:**

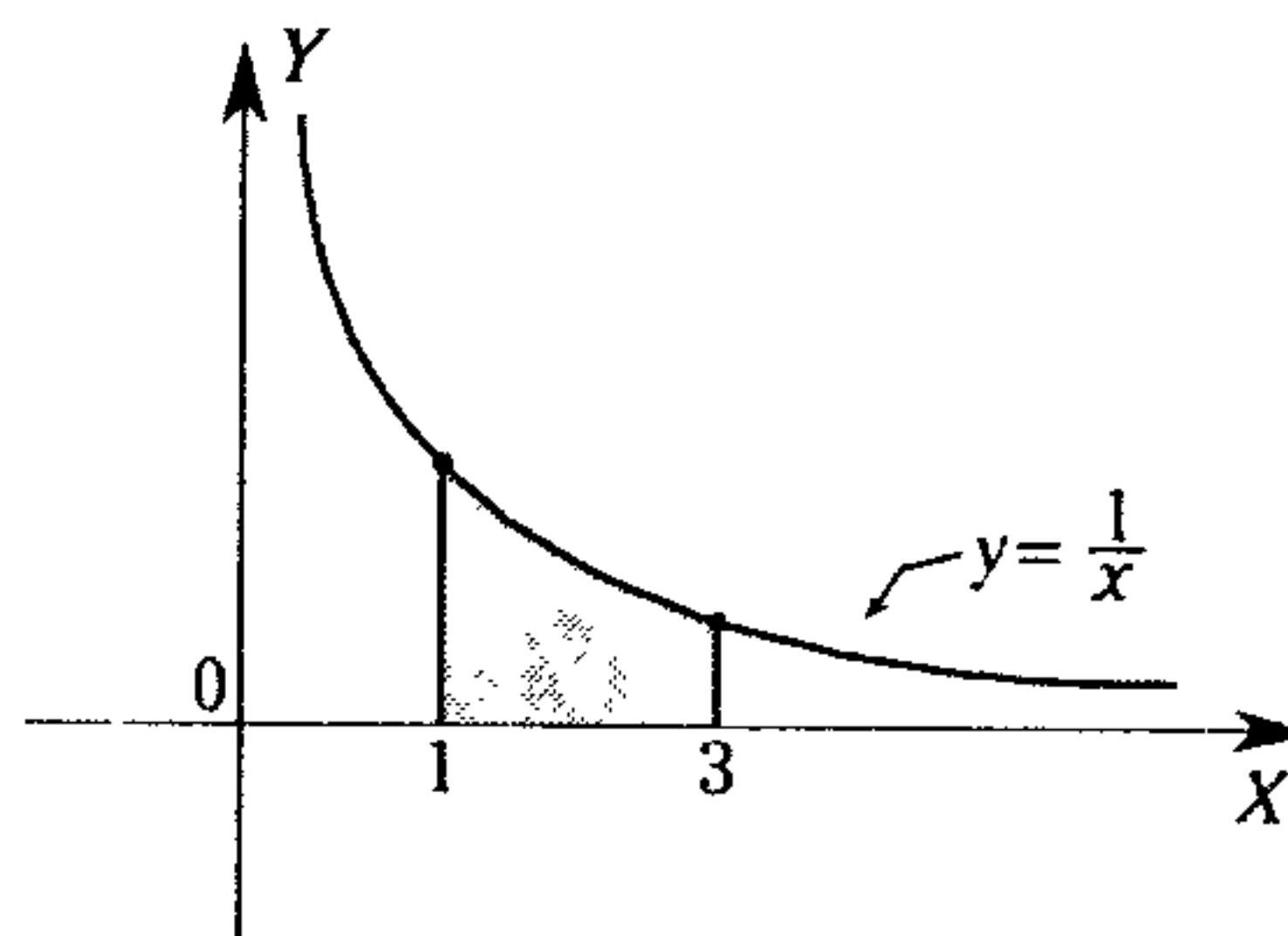


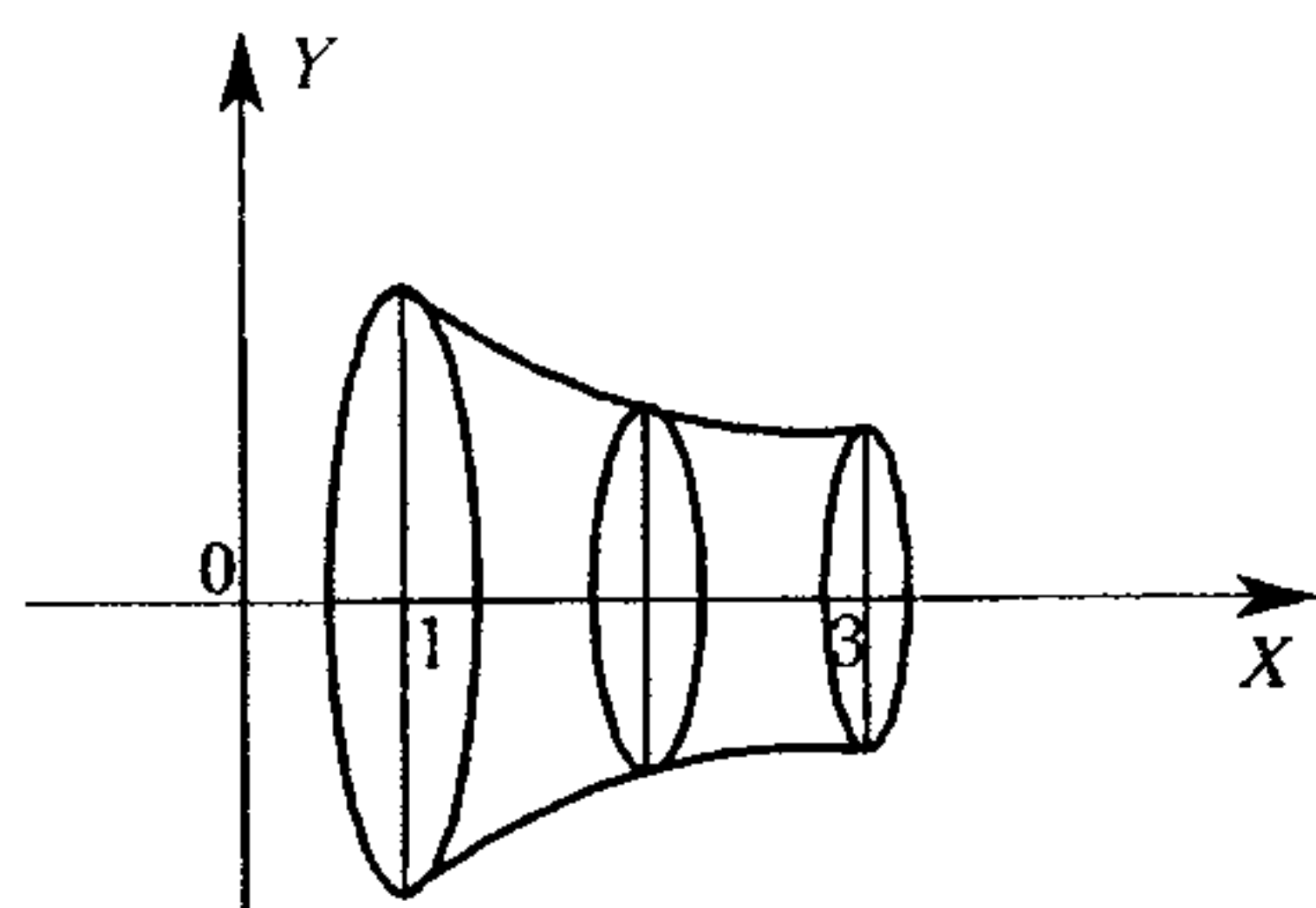
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 [\sqrt{x}]^2 dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 \\ &= \pi \left( \frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{15}{2} \pi \mu^3 \end{aligned}$$

#### Ejemplo 2

Halle el volumen del sólido que se genera por la rotación de la región limitada por la curva:  $y = \frac{1}{x}$  y el eje  $X$  en el intervalo de:  $[1;3]$

**Resolución:**



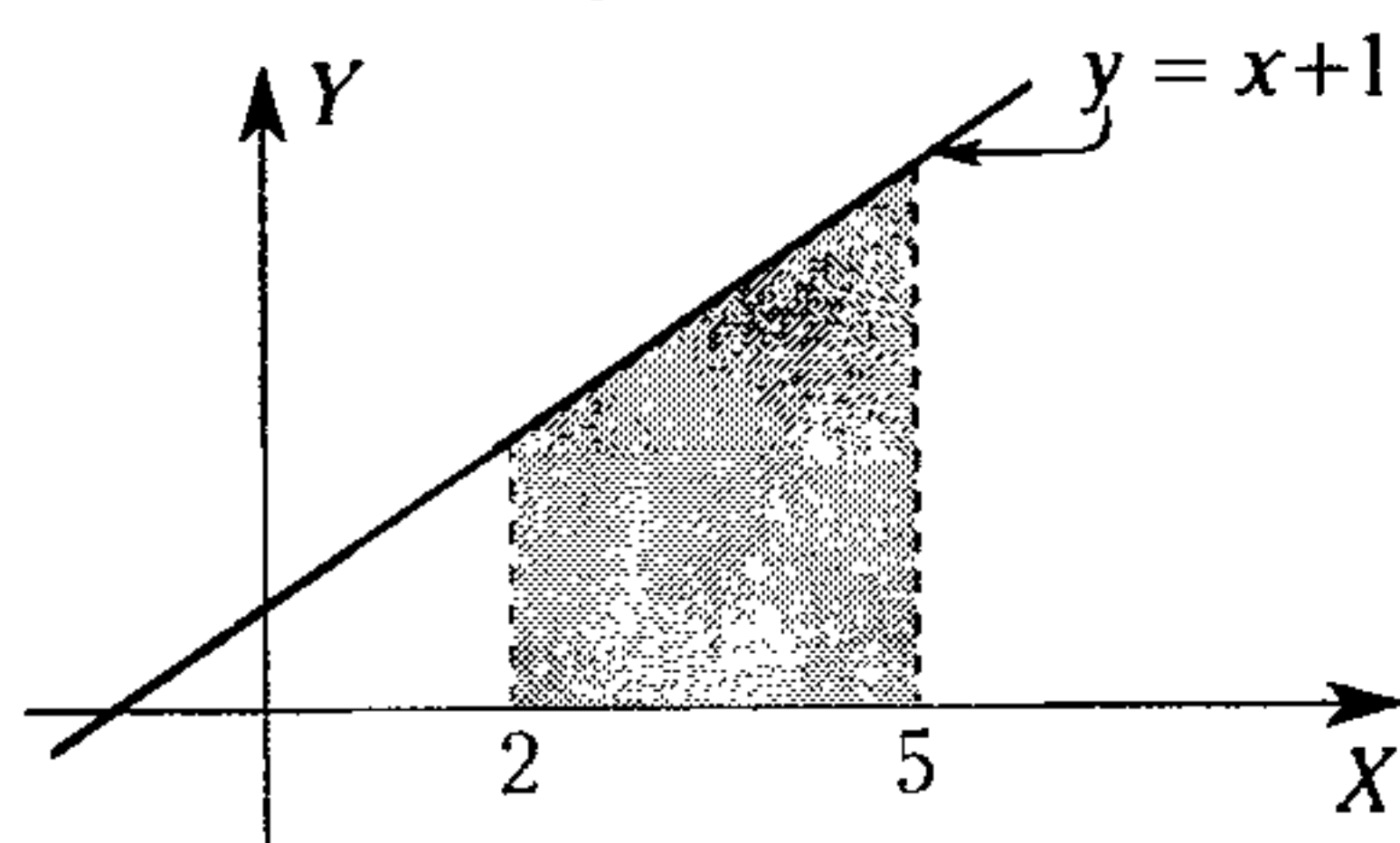


$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\pi \frac{1}{x} \Big|_1^4$$

$$= -\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1}\right) = \frac{3}{4} \pi u^3$$

**Ejemplo 3**

Halle el área de la región sombreada.



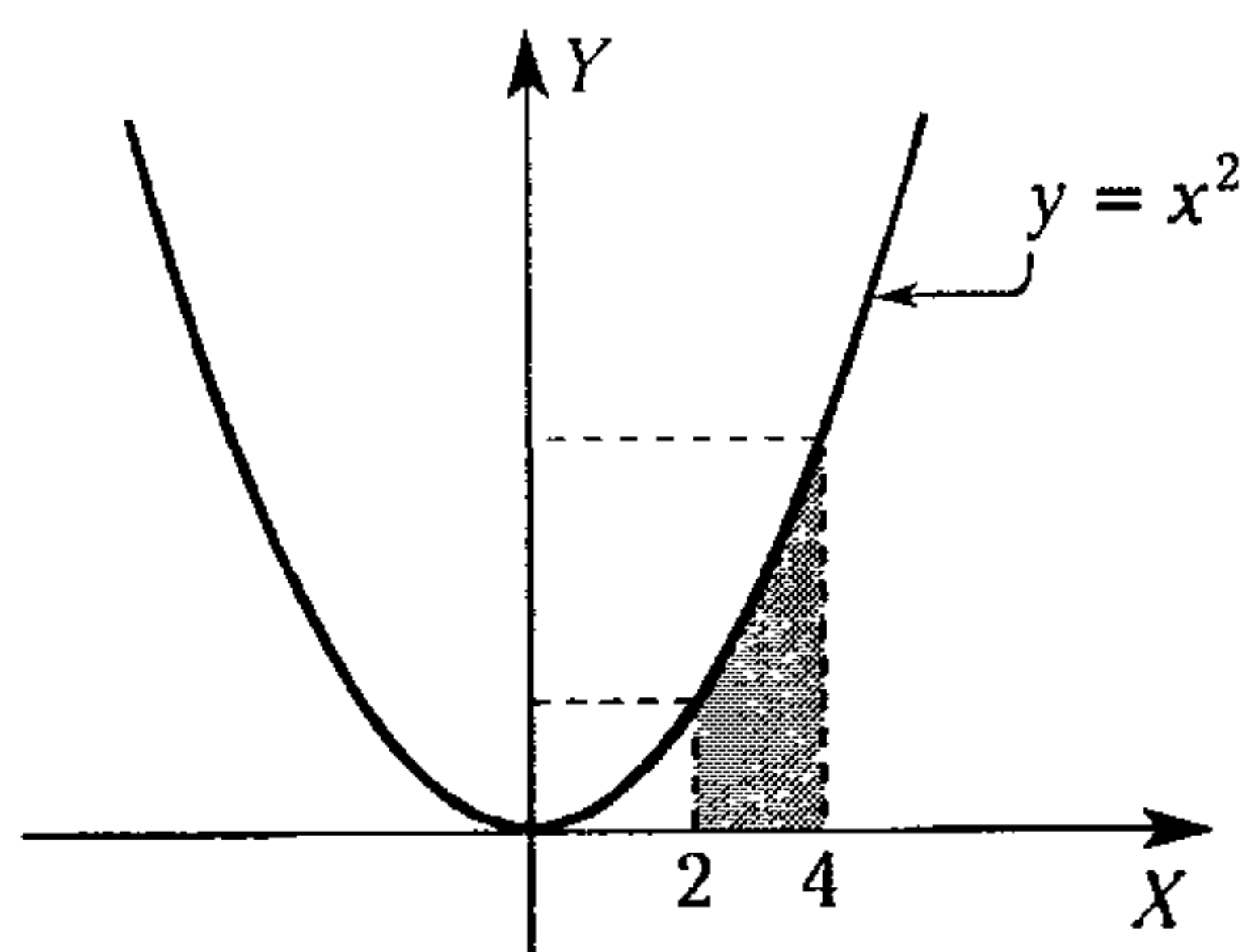
**Resolución:**

$$A = \int_2^5 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_2^5$$

$$A = \left(\frac{5^2}{2} + 5\right) - \left(\frac{2^2}{2} + 2\right) = \frac{27}{2} u^2$$

**Ejemplo 4**

Calcular el área de la región sombreada.



**Resolución:**

$$A = \int_2^5 (x^2) dx = \left(\frac{x^3}{3}\right) \Big|_2^5$$

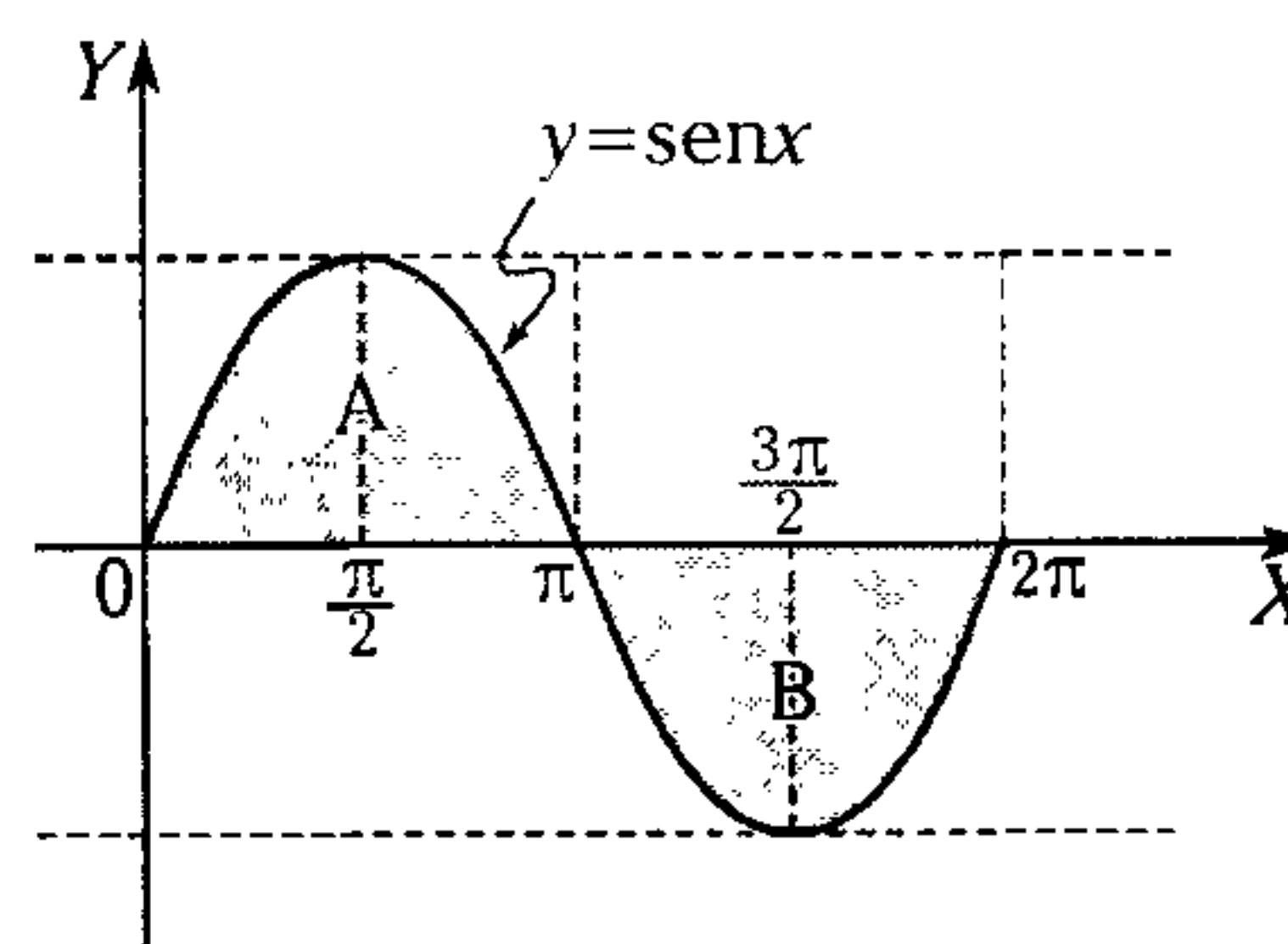
$$A = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{56}{3} u^2$$

**Ejemplo 5**

Encontrar el área bajo la curva de  $y = \sin x$  y el eje  $X$  en el intervalo  $[0; 2\pi]$ .

**Resolución:**

Graficando  $y = \sin x$ ,  $x \in [0; 2\pi]$



El área pedida es la suma de las áreas de A y B.

$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$= -1 - (-1) = 2$$

El área de B está totalmente por debajo del eje  $X$ , por lo tanto al evaluar la integral definida en  $[\pi; 2\pi]$  se obtendrá un número negativo. entonces el área para B se tomará con valor absoluto.

$$B = \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = \left| (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right|$$

$$= |-1 - (1)| = |-2| = 2$$

∴ El área pedida es:

$$(2+2)u^2 = 4u^2$$



# Problemas Resueltos

## Problema 1

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow n} \left( \frac{n \operatorname{sen} x - x \operatorname{senn}}{n \cos x - x \cos n} \right)$$

### Resolución:

Aplicando la regla de H'ospital, derivando numerador y denominador separadamente:

$$\lim_{x \rightarrow n} \left( \frac{n \cos x - \operatorname{senn}}{-n \operatorname{sen} x - \cos n} \right) = \frac{\operatorname{senn} - n \cos n}{n \operatorname{senn} + \cos n}$$

## Problema 2

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^x - 1}{\ln x} \right)$$

### Resolución:

Aplicando la regla de H'ospital, derivando numerador y denominador separadamente y teniendo en cuenta que:

$$\boxed{y = x^x \Rightarrow y' = x^x (\ln x + 1)}$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^x (\ln x + 1) - 0}{\frac{1}{x}} \right) = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

## Problema 3

Halle a y b si la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 4x^2, & x < -1/2 \\ bx - 3, & x \geq -1/2 \end{cases}$$

es diferenciable en todo  $\mathbb{R}$

### Resolución:

Se observa que en las reglas de correspondencias:

$$y_1 = ax^3 + 4x^2, \text{ para } x < -1/2$$

$$y_2 = bx - 3, \text{ para } x \geq -1/2$$

Ya son diferenciables o derivables, pero debemos analizar también en el punto  $x = -1/2$  planteando

las condiciones de existencia de la derivada en el punto  $x = -1/2$

$$\text{I. } y_1(-1/2) = y_2(-1/2)$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{8} + 1 = -\frac{b}{2} - 3$$

$$\Rightarrow a - 4b = 32 \dots\dots\dots (\alpha)$$

$$\text{II. } y_1'(-1/2) = y_2'(-1/2)$$

$$\Rightarrow 3ax^2 + 8x = b$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{4} - 4 = b \dots\dots\dots (\beta)$$

De  $(\alpha)$  y  $(\beta)$ :  $a = -8$ ,  $b = -10$

## Problema 4

Indique el número de raíces reales de:

$$(x-1)(x-7)(x^2-8x+15)+$$

$$(x+1)(x-2)(x^2-10x+24) = 0$$

### Resolución:

Tenemos:

$$f(x) = (x-1)(x-7)(x-5)(x-3)+$$

$$(x+1)(x-2)(x-6)(x-4) = 0$$

Vemos que:

$$\left. \begin{matrix} f(-1) = (+) \\ f(1) = (-) \end{matrix} \right\} \exists x_0 \in <-1, 1> / f(x_0) = 0$$

$$\left. \begin{matrix} f(2) = (-) \\ f(3) = (+) \end{matrix} \right\} \exists x_1 \in <2, 3> / f(x_1) = 0$$

$$\left. \begin{matrix} f(4) = (+) \\ f(5) = (-) \end{matrix} \right\} \exists x_2 \in <4, 5> / f(x_2) = 0$$

$$\left. \begin{matrix} f(6) = (-) \\ f(7) = (+) \end{matrix} \right\} \exists x_3 \in <6, 7> / f(x_3) = 0$$

Vemos que sus cuatro raíces son reales ya que:

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}$$

**Problema 5**

Graficar la función:

$$f(x) = 2x - \tan(x); x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

**Resolución:**

Analizando la primera derivada:

$$f'(x) = 2 - \sec^2 x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \sec x = \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1, f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1$$

son máximas o mínimas.

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \sec^2 x < 2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} < \sec x < \sqrt{2}$$

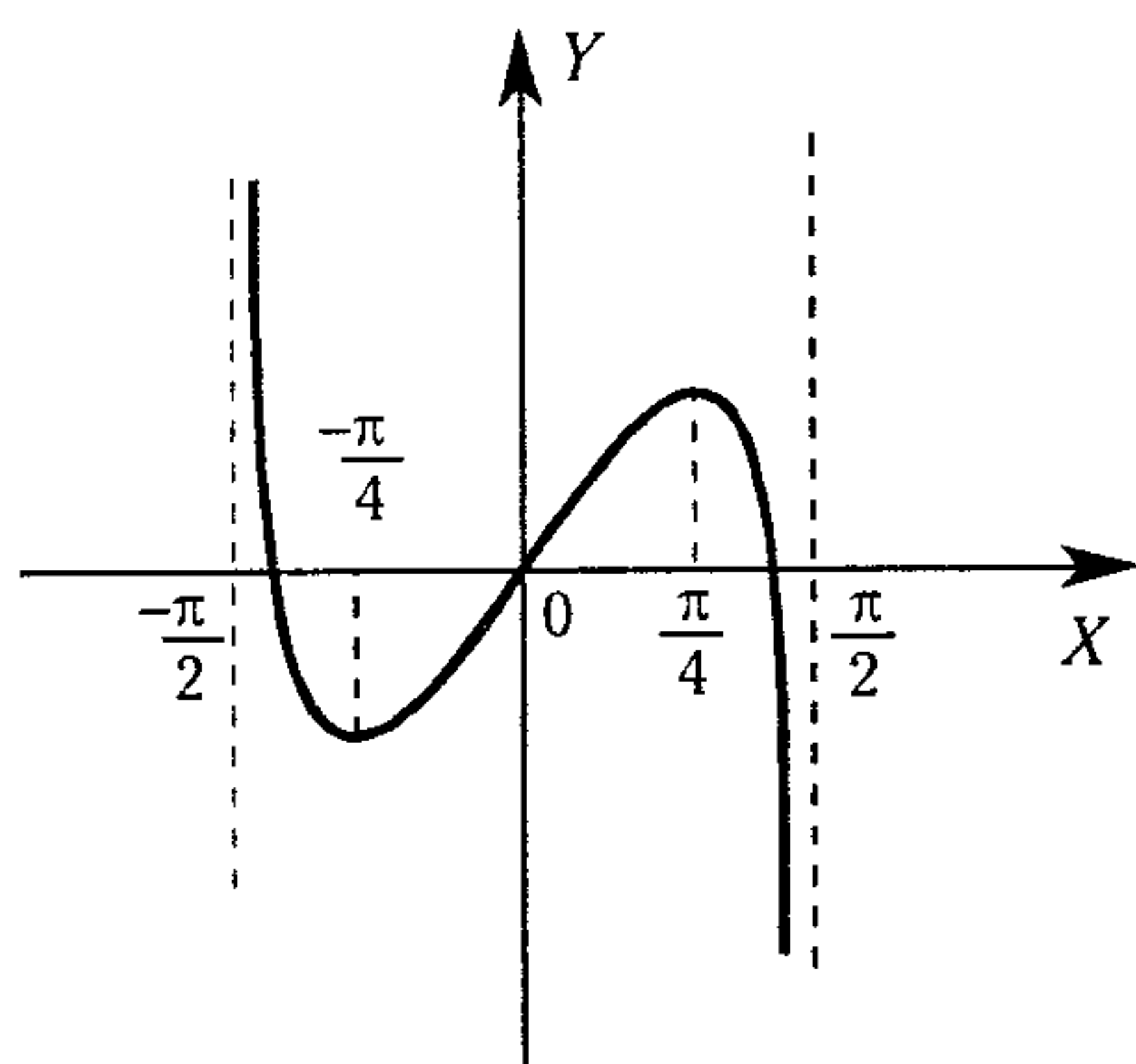
$$\therefore \text{En } \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle \text{ es creciente}$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \sec^2 x > 2$$

$$\Rightarrow \sec x > \sqrt{2} \vee \sec x < -\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{En } \left\langle -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ es decreciente}$$

Realizando la gráfica se tiene:

**Problema 6**

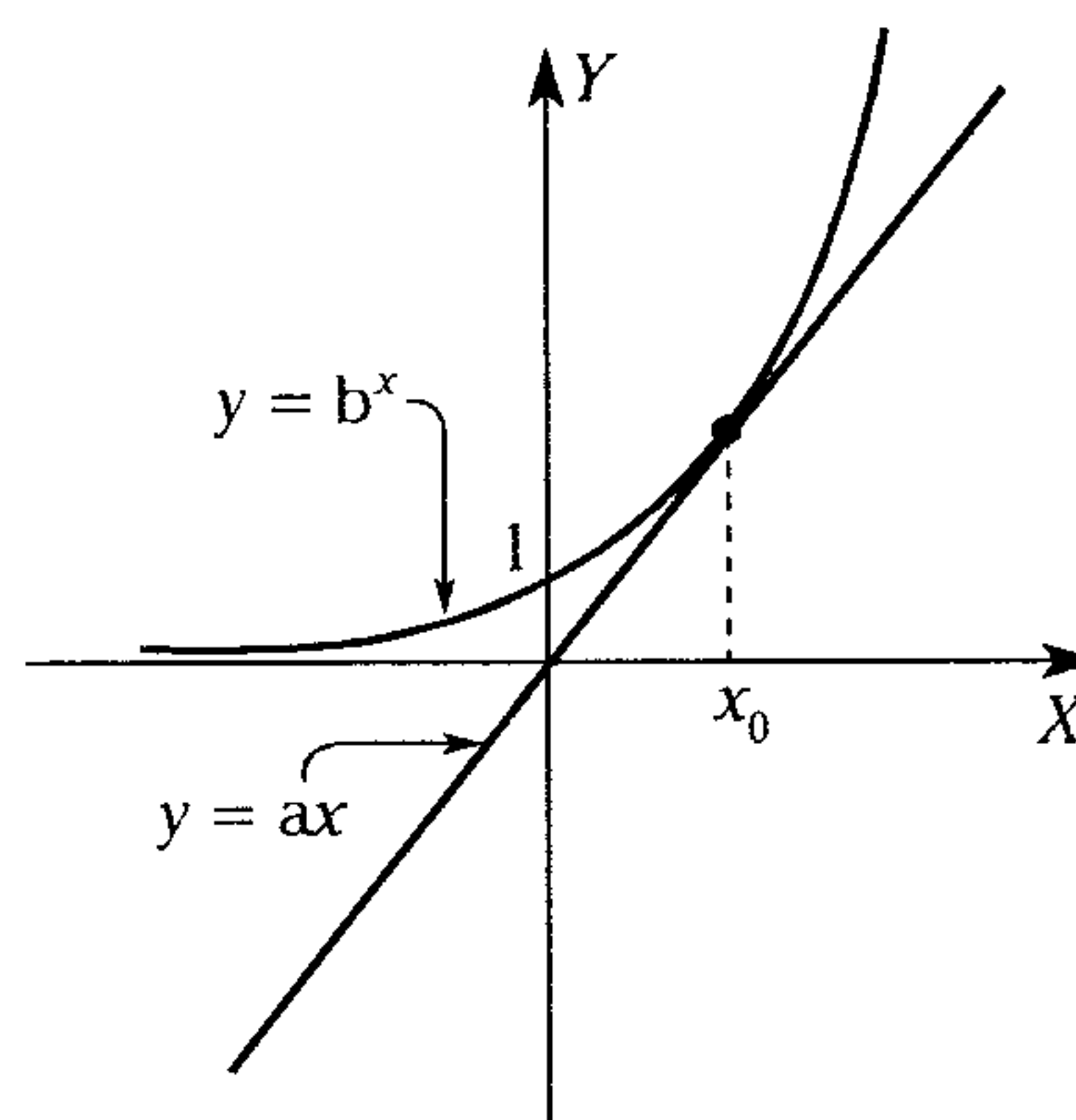
Halle la relación entre  $a$  y  $b$  de modo que la ecuación:

$$ax = b^x; b > 1$$

No tenga soluciones reales.

**Resolución:**

Graficando las funciones considerando inicialmente un punto de intersección.



En el punto  $x_0$  se cumple:

$$b^{x_0} = ax_0 \dots\dots\dots (1)$$

$$b^{x_0} \ln b = a \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) \text{ en } (2): \cancel{b^{x_0}} \ln b = \cancel{a} \Rightarrow x_0 = \log_b e$$

Reemplazando en (2):

$$\cancel{b^{\log_b e}} \ln b = a \Rightarrow a = e \ln b$$

**Conclusiones:**

- I. Si  $a = e \ln b \Rightarrow$  existe solamente una solución real.
- II. Si  $a > e \ln b \Rightarrow$  existen dos soluciones reales
- III.  $0 \leq a < e \ln b \Rightarrow$  no tiene soluciones reales.

**Problema 7**

Si  $f(x) = ax^3 + bx^2$ , halle  $a$  y  $b$  de modo que la gráfica de  $f$  tenga un punto de inflexión en el punto  $P = (1, 2)$

**Resolución:**

Derivando  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Como  $P = (1, 2)$  es punto de inflexión, entonces,

$$f''(1) = 0$$

Reemplazando en

$$f''(x): 6a(1) + 2b = 0$$

$$3a + b = 0 \dots\dots (\alpha)$$

Además, si  $P = (1, 2) \Rightarrow f(1) = 2$

Se reemplaza en  $f(x)$ :

$$a(1)^3 + b(1)^2 = 2$$

$$a + b = 2 \dots\dots (\beta)$$

Resolviendo  $(\alpha)$  y  $(\beta)$ :  $a = -1 \wedge b = 3$

**Problema 8**

Hallar  $\frac{dy}{dx}$ , si  $y = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$ ,  $f'(x) = \sin(x^2)$

**Resolución:**

Hacemos  $g(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow y = f(g(x))$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) \dots\dots (1)$$

$$g(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} \dots\dots (2)$$

$$f'(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(g(x)) = \sin\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2 \dots\dots (3)$$

Se reemplaza (2) y (3) en (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(x+1)^2} \sin\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2$$

**Problema 9**

Dado  $y = x^2 + ax + b$ , de modo que  $y = 3$ , sea un mínimo de este trinomio en  $x = 1$ , halle  $a$  y  $b$ .

**Resolución:**

Como  $y = x^2 + ax + b$

$$\Rightarrow y' = 2x + a$$

Por máximos y mínimos

$$\underbrace{y'} = 0$$

$$2x + a = 0 \Rightarrow a = -2x$$

Como  $x = 1$  es un punto crítico.

$$\Rightarrow a = -2(1) \Rightarrow a = -2 \dots\dots (\alpha)$$

Además,

$$\underbrace{y_{(1)}} = 3 = \text{mínimo}$$

$$1 + a + b = 3 \Rightarrow a + b = 2 \dots\dots (\beta)$$

Se reemplaza  $(\alpha)$  y  $(\beta)$ :

$$a = -2 \wedge b = 4$$

**Problema 10**

Dada la función  $f$  tal que:

$$f(x) = 5x^2 + \frac{a}{x^5}, x \in \mathbb{R}^+$$

Determine el menor valor positivo  $a$  para que se cumpla  $f(x) \geq 14, \forall x \in Df$

**Resolución:**

Dato: el mínimo valor de  $f$  es 14

Derivando

$$f'(x) = 10x - \frac{5a}{x^6}$$

Igualando a cero y despejando se tiene:

$$x = \sqrt[7]{\frac{a}{2}}$$

Reemplazando en la función f

$$5\sqrt[7]{\frac{a}{2}} + \frac{a}{\sqrt[7]{\frac{a}{2}}} = 14$$

Al efectuar tenemos:

$$a = 16\sqrt{2}$$

### Problema 11

Determine el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[n]{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n} - x \right)$$

**Resolución:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x^n \left( 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right)} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt[n]{1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

Por H'ospital se tiene como respuesta:

$$\frac{a_1}{n}$$

### Problema 12

Calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[4]{x^4 + x^3} - \sqrt[3]{x^3 + x^2} \right)$

**Resolución:**

Dando forma:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left( \sqrt[4]{x^4 + x^3} - x \right) - \left( \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x \right) \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[4]{x^4 + x^3} - x \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x \right) \end{aligned}$$

Racionalizando se tiene

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{12}$$

### Problema 13

Dadas las funciones f y h tal que:

$$f(x) = x^2 - 3x - 2$$

$$h(x) = x(2-x)$$

Determine la gráfica de P siendo:

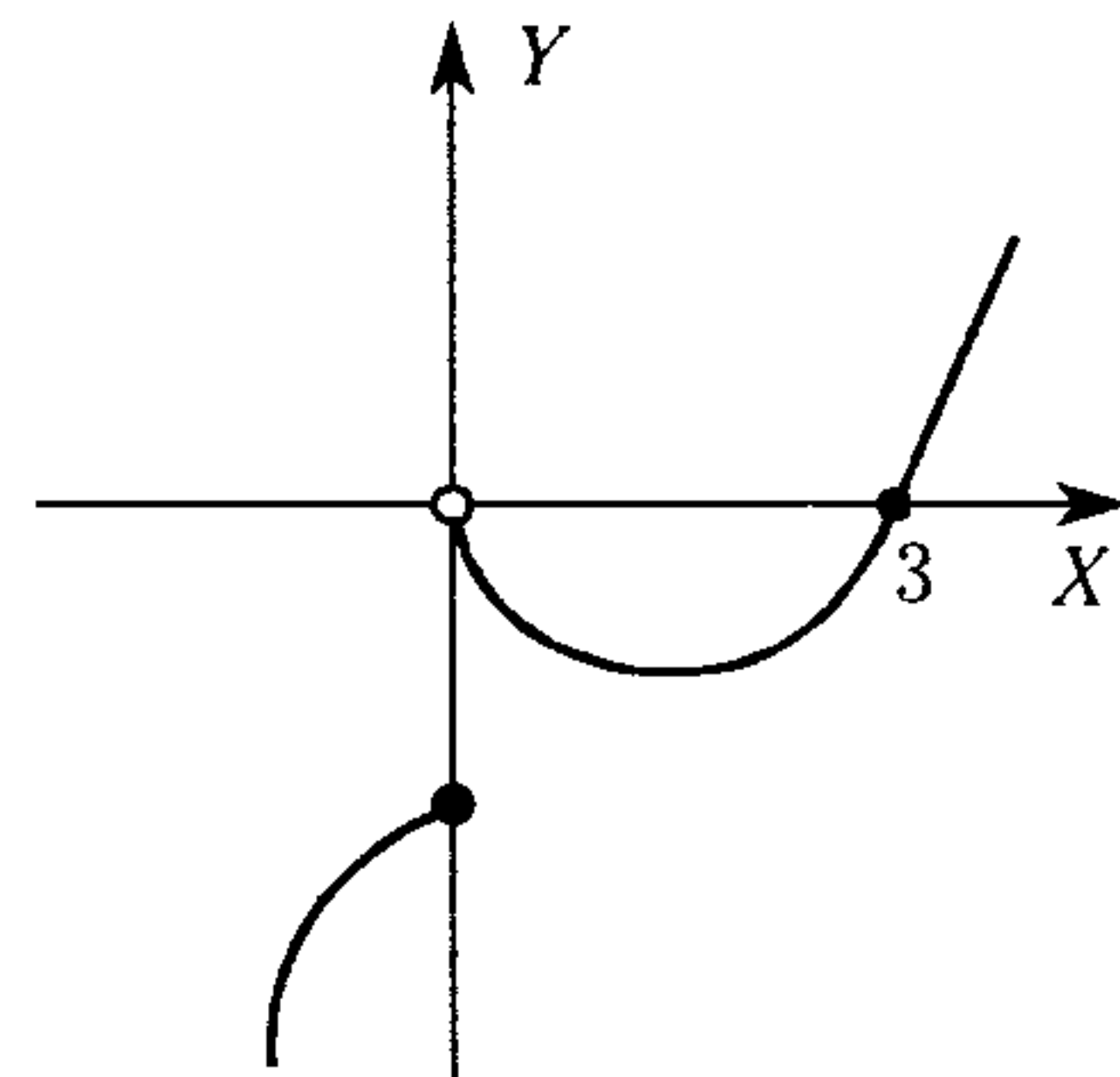
$$P(x) = \begin{cases} 2 + f(x), & x > 0 \\ h(x) - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

**Resolución:**

Reemplazando los datos:

$$P(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x > 0 \\ -(x-1)^2, & x \leq 0 \end{cases}$$

Graficando cada regla de correspondencia.



### Problema 14

Si  $xy' = 3x^2 + y - 1, \forall x \in \mathbb{R}$  donde  $y = y(x)$  encuentre  $y(2)$  si se sabe que la gráfica de la función  $y = y(x)$  presenta extremo relativo en

$$x = -\frac{5}{6}$$

**Resolución:**

$$\text{Como } xy' = 3x^2 + y - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Para } x = 0, 0 = y(0) - 1 \Rightarrow y(0) = 1$$



Además, derivando se tiene:

$$xy'' + y' = 6x + y'$$

$$\Rightarrow xy'' = 6x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y'' = 6$$

$$\Rightarrow y'(x) = 6x + m \dots\dots\dots (\alpha)$$

$$\Rightarrow y'(-5/6) = 0 : 6(-5/6) + m = 0$$

$$\Rightarrow m = 5$$

$$\begin{aligned} \text{También de } (\alpha): y(x) &= 3x^2 + mx + n \\ &= 3x^2 + 5x + n \end{aligned}$$

$$\text{Como } y(0) = 1 \Rightarrow n = 1$$

$$\therefore y(x) = 3x^2 + 5x + 1$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } y(2) &= 3(2)^2 + 5(2) + 1 \\ &= 23 \end{aligned}$$

### Problema 15

Indicar verdadero o falso en las siguientes proposiciones:

- I. Si  $f(x) \cdot f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \wedge f(0) \cdot f(2) < 0$  entonces,  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$
- II. Sean  $f$  y  $f'$  continuas en  $\mathbb{R}$ .  
Si  $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , entonces,  $\exists c \in \mathbb{R} / f(c) = 0$
- III. Sean  $f$  y  $f'$  continuas en  $\mathbb{R}$  si  $f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , entonces,  $f$  es inyectiva.

### Resolución:

- I. FALSO. Como  $f(x) \cdot f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ 
  - Para  $f(x) > 0$  se tiene  $f'(x) > 0$ , es decir, la gráfica de  $f$  por encima del eje  $X$  es la de una función creciente.
  - Para  $f(x) < 0$  se tiene  $f'(x) < 0$ , es decir, la gráfica de  $f$  por debajo del eje  $X$  es la de una función decreciente. Con esto,  $f$  no puede ser continua.

- II. FALSO. Como  $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , entonces,  $f$  es creciente; esto no implica que la gráfica de  $f$  cortará al eje  $X$ , por ejemplo:

$$f(x) = e^x$$

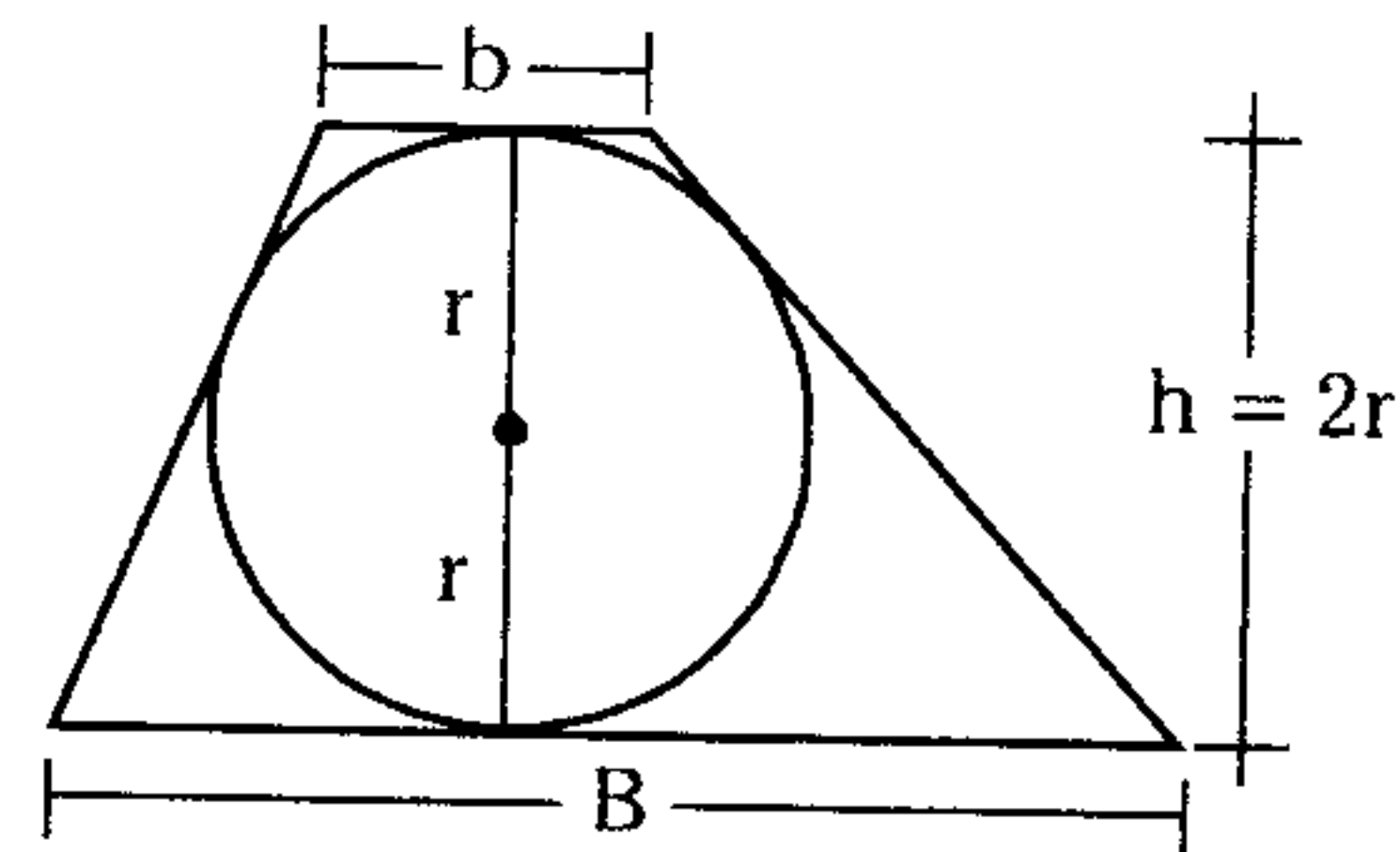
$$f'(x) = e^x > 0$$

Sin embargo,  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

- III. VERDADERO. Como  $f'$  continua y  $f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  entonces  $f'(x) > 0 \forall x \vee f'(x) < 0 \forall x \Rightarrow f_{\text{crec}} \vee f_{\text{decrec}}$  en  $\mathbb{R}$ .

### Problema 16

Calcular el área máxima de la circunferencia inscrita en el trapecio si  $h = 2b \wedge B + 2b = 8$



### Resolución:

El área máxima de la circunferencia será porque en el trapecio el área es máxima:

$$\Rightarrow S = \left( \frac{B+b}{2} \right) h = \left( \frac{8-b}{2} \right) 2b$$

$$S = 8b - b^2$$

$$\frac{ds}{db} = 0 \Rightarrow 8 - 2b = 0$$

$$b = 4$$

$$h = 2b = 2r \Rightarrow r = 4$$

$$S_{\max} \odot = \pi r^2 = 16\pi$$

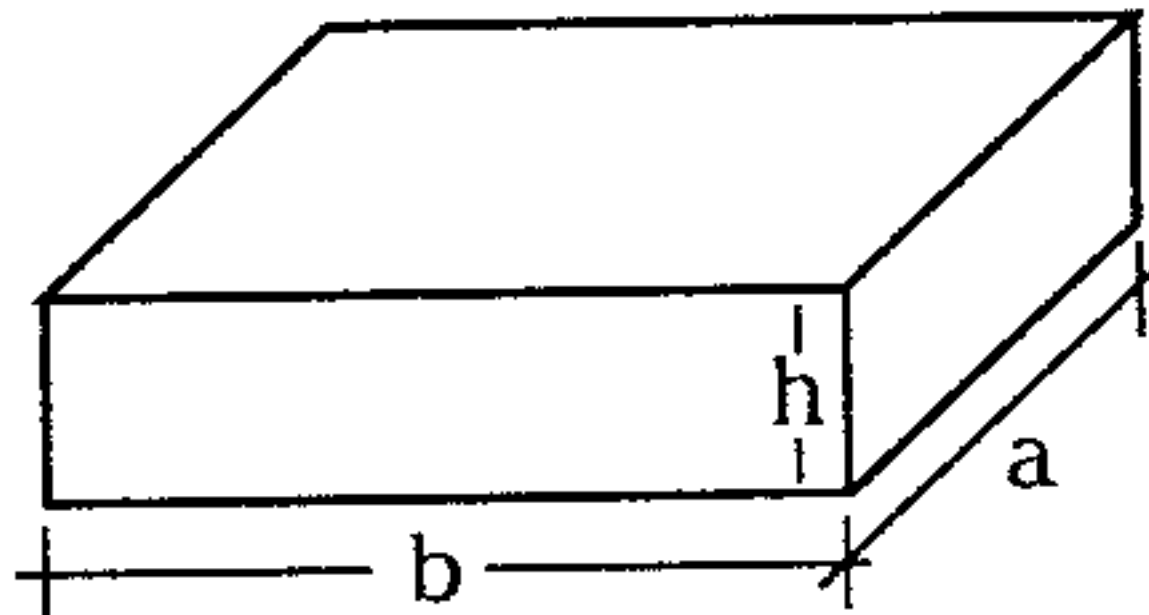
$$\frac{d^2S}{db^2} = -2b < 0$$

$\Rightarrow$  es un punto máximo.

**Problema 17**

Se tiene una casa de forma rectangular. Se desean enchapar las paredes. Calcular a cuánto ascendería el presupuesto, si la casa posee 3 ventanas de  $5 \text{ m}^2$  cada una y 5 puertas de  $5 \text{ m}^2$  cada una.

$b, a, h$  dimensiones y  $b+a+5h = 50$   
 $(\text{costo} \times \text{m}^2) = S/5$

**Resolución:**

$$\Rightarrow S_L = 2bh + 2ha - 3(5) - 5(5)$$

$$S_L = 2h(b+a) - 40$$

$$S_L = 2h(50-5h) - 40$$

$$S_L = 100h - 10h^2 - 40$$

$$\frac{dS_L}{dh} = 100 - 20h = 0$$

$$\Rightarrow h = 5$$

$$\frac{d^2S}{dh^2} = -20 \text{ indica que sería máxima ascendería}$$

$$\Rightarrow S_L = 2h(50-5h) - 40$$

$$S_L = 10(50-25) - 40 = 210$$

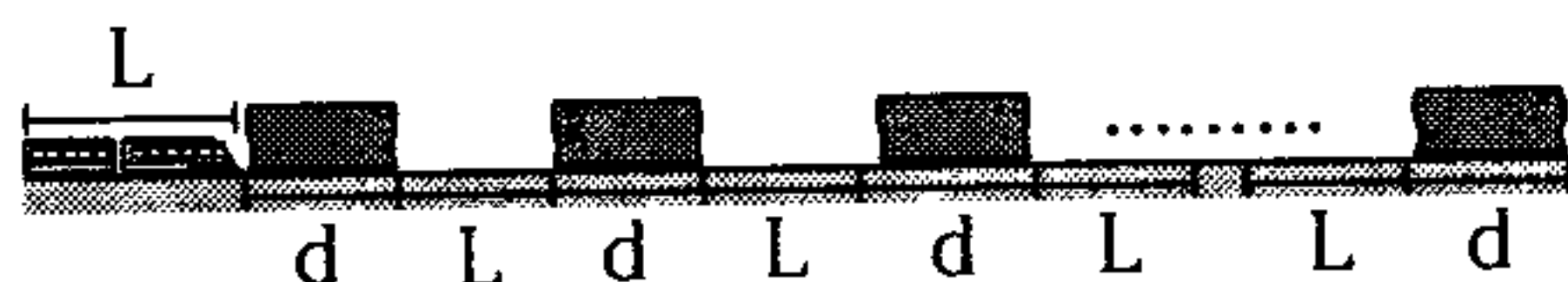
$$S_L = 210 \text{ m}^2 \text{ cada m}^2 = S/5$$

$$\Rightarrow \text{Presupuesto} \Rightarrow 210 \times 5 = S/1050$$

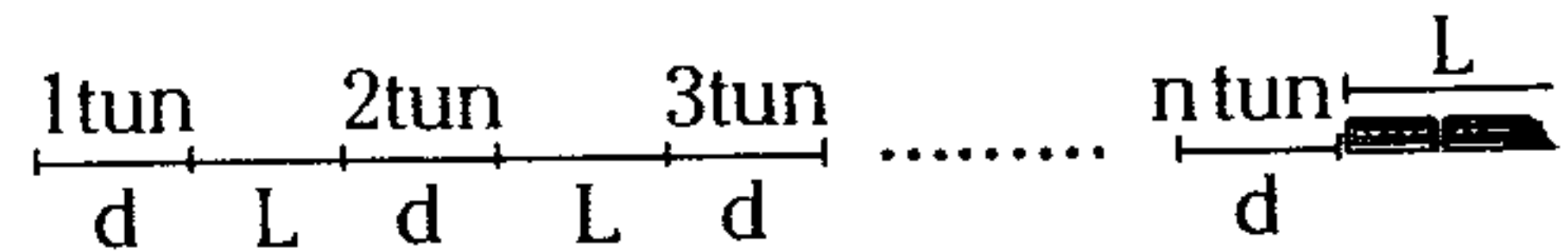
**Problema 18**

De la figura el tren mide  $L$

$V_T = 10 \text{ m/s}$  (velocidad del tren)



Calcular el tiempo mínimo  $t$  que demore en pasar los  $n$  túneles de distancia  $d$  si  $d = (t-5)^2$  metros

**Resolución:**

$$\Rightarrow e_{\text{total}} = nd + nL$$

$$e_{\text{total}} = v \cdot t \Rightarrow nd + nL = 10t$$

$$n(t-5)^2 + nL = 10t$$

$$nL = 10t - n(t-5)^2$$

$$L = \frac{10}{n}t - (t-5)^2$$

Para que sea mínimo el tiempo, la distancia debe ser máxima.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{10}{n} - 2(t-5) = 0$$

$$\frac{10}{n} = 2(t-5)$$

$$\frac{5}{n} + 5 = t$$

$$\Rightarrow t = 5 \left( \frac{1+n}{n} \right)$$

**Problema 19**

Se da una circunferencia de radio  $R$  donde se divide su diámetro en dos partes que se toman como diámetro de dos circunferencias. Halle el área máxima de la superficie comprendida entre las 3 circunferencias.

**Resolución:**

Sean  $2a$  y  $2b$  los diámetros de las circunferencias inscritas.

Esto es:  $a+b=R$

Sea  $S$  el área comprendida entre las 3 circunferencias:

$$S = \pi R^2 - \pi a^2 - \pi b^2$$

$$= \pi [R^2 - a^2 - (R-a)^2]$$

$$= 2\pi(Ra - a^2) = 2\pi a(R-a)$$

Pero, sabemos que el máximo del producto de los factores  $a$  y  $R-a$  a cuya suma es  $R$ , se verifica cuando dichos factores son iguales.

$$\text{Esto es: } R-a=a \Rightarrow a=\frac{R}{2}$$

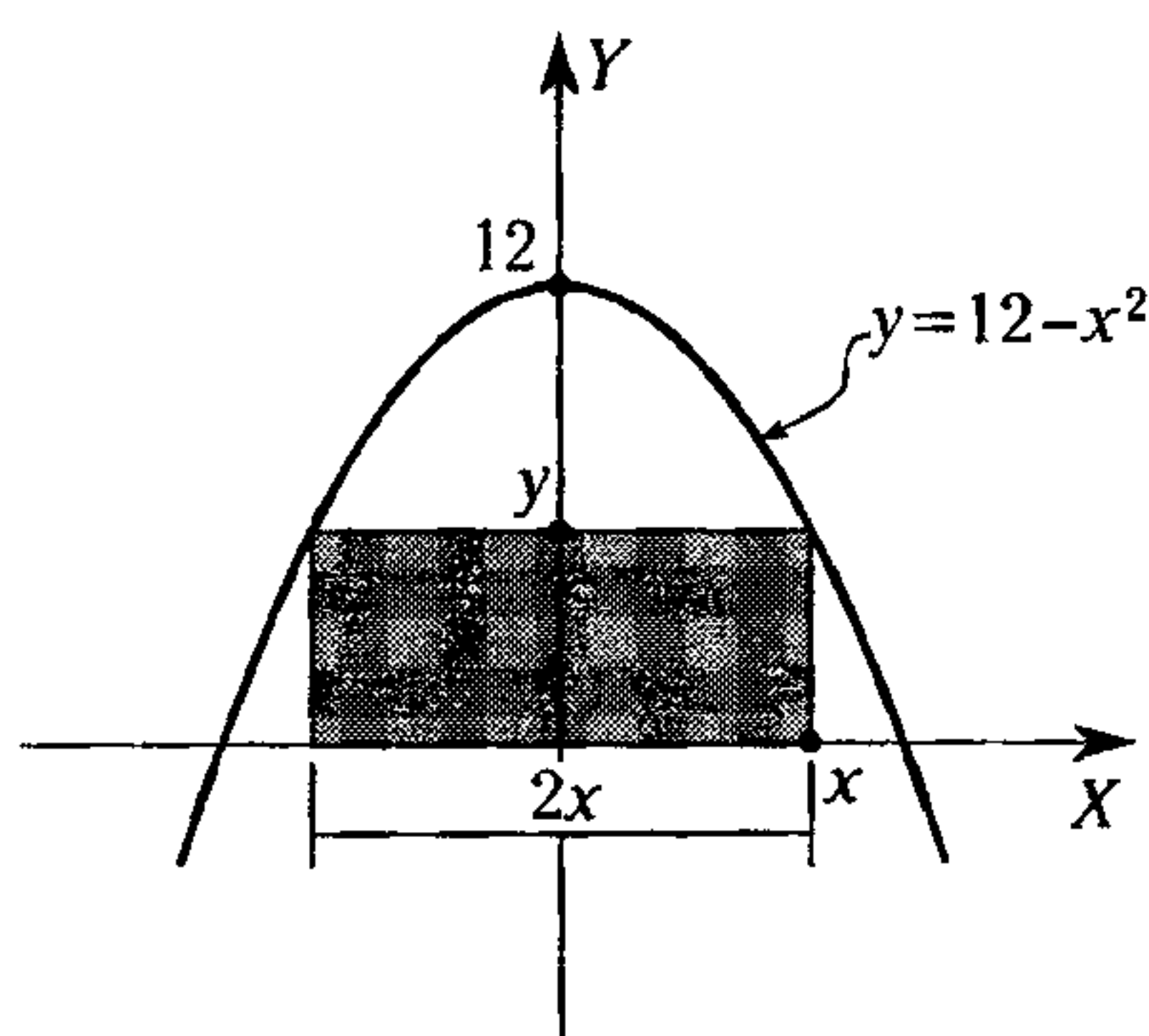
$$\wedge b=\frac{R}{2}$$

$$\therefore S_{\max} = \frac{\pi R^2}{2}$$

### Problema 20

Hallar el área del mayor rectángulo que tiene su base inferior en el eje  $X$  y con dos vértices en la curva  $y=12-x^2$ .

**Resolución:**



$$A = 2xy = 2xy = 2x(12-x^2)$$

$$\Rightarrow A = 24x - 2x^3$$

$$\Rightarrow A'(x) = 24 - 6x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 8$$

$$\Rightarrow A = 2xy = 2(16) = 32$$

### Problema 21

Un punto se mueve sobre la parábola  $2y^2 = 7x$ , de manera que la abscisa aumenta uniformemente 3 cm/s. ¿En qué punto aumenta la abscisa y la ordenada a la misma razón?

**Resolución:**

Por dato:  $\frac{dx}{dt} = 3 \text{ cm/s}$

Tenemos que hallar el punto  $(x; y)$  tal que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

Como  $2y^2 = 7x$  derivando implícitamente con respecto al tiempo  $t$ , tenemos:

$$4y \frac{dy}{dt} = 7 \frac{dx}{dt} ; \left( \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow 4y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{4}$$

Además  $2y^2 = 7x \Rightarrow x = \frac{7}{8}$

$$\Rightarrow (x; y) = \left( \frac{7}{8}; \frac{7}{4} \right)$$

### Problema 22

Sea  $f$  una función derivable en todo su dominio tal que  $f(x)$  es de segundo grado y se cumple que  $f'(x) - a = 6x$ . Calcule el mínimo valor de  $f(x)$  si posee valor mínimo para  $x = -2$  y además  $f(0) = 17$ .

**Resolución:**

$$f'(x) = 6x + a$$

Cuando:  $x = -2$ :  $f'(-2) = -12 + a = 0$

$$\Rightarrow a = 12$$

Como  $f(x)$  es de segundo grado

$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 + 12x + b$$

Como  $f(0) = b = 17$

Por tanto:  $f(x) = 3x^2 + 12x + 17$

mínimo  $f(x) = f(-2) = 5$

**Problema 23**

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = (2x^2 + 3x)e^x$ .

Determine  $\alpha + \beta + \gamma$  tal que:

$$\alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma e^x = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Resolución:**

$$f(x) = (2x^2 + 3x)e^x$$

$$f'(x) = (4x + 3)e^x + (2x^2 + 3x)e^x$$

$$= (2x^2 + 7x + 3)e^x$$

$$f''(x) = (4x + 7)e^x + (2x^2 + 7x + 3)e^x$$

$$= (2x^2 + 11x + 10)e^x$$

Se cumple:  $\alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma e^x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\alpha(2x^2 + 11x + 10)e^x + \beta(2x^2 + 7x + 3)e^x + \gamma e^x$$

$$= (2x^2 + 3x)e^x$$

$$\underbrace{2(\alpha + \beta)}_2 x^2 + \underbrace{(11\alpha + 7\beta)}_3 x + \underbrace{10\alpha + 3\beta + \gamma}_0$$

$$= 2x^2 + 3x + 0$$

Se deduce que:

$$\alpha + \beta = 1$$

$$11\alpha + 7\beta = 3$$

$$10\alpha + 3\beta + \gamma = 0$$

$$\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 4$$

Por lo tanto:  $\alpha + \beta + \gamma = -1 + 2 + 4 = 5$

**Problema 24**

Un viaje subsidiado por un colegio costará 15 soles a cada alumno si viajan no más de 150 alumnos; sin embargo, el costo por alumno se reducirá 0,05 soles por cada uno que sobrepase los 150 soles. ¿Cuántos alumnos deben realizar el viaje a fin de que el colegio reciba los mayores ingresos brutos?

**Resolución:**

Sea  $x$ : # alumnos

$I(x)$ : ingreso bruto total por  $x$  alumnos.

$$I(x) = \begin{cases} 15x, & x \leq 150 \\ (15 - 0,05(x - 150))x, & x > 150 \end{cases}$$

Piden: máximo valor de  $I(x)$

Cuando  $x \leq 150$   $I(x)_{\max} = 15(150)$

$$\text{Cuando } x > 150 \quad I(x) = 15x - \frac{x^2}{20} + \frac{150}{20}x$$

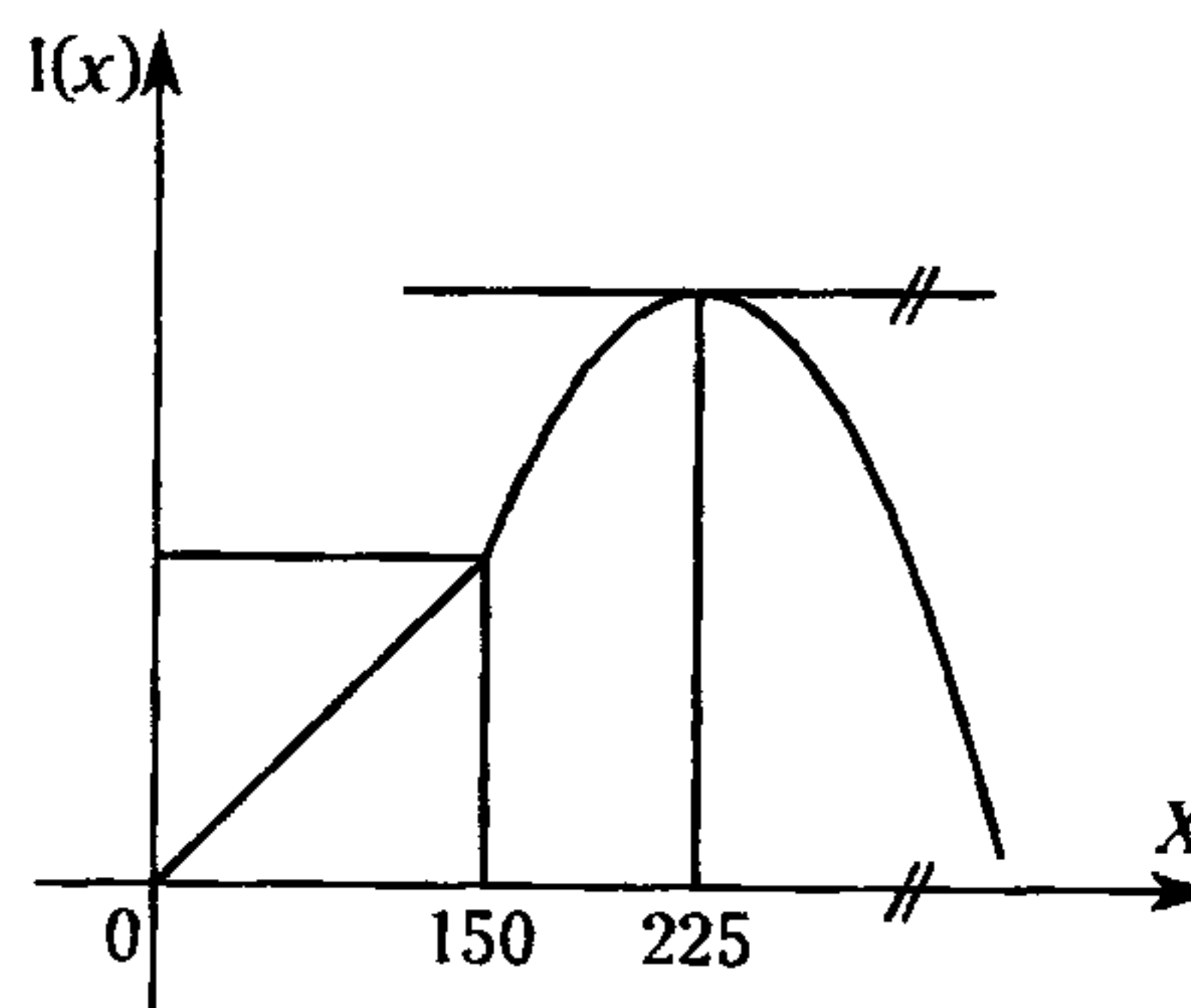
$$I'(x) = 15 - \frac{2x}{20} + \frac{150}{20} = 0$$

$$\Rightarrow x = 225$$

Además  $I''(x) = -\frac{2}{20} < 0 \Rightarrow$  Para  $x = 225$  habrá máximo.

$$I(225) = 15(225) - \frac{(225)^2}{20} + \frac{150}{20}(225)$$

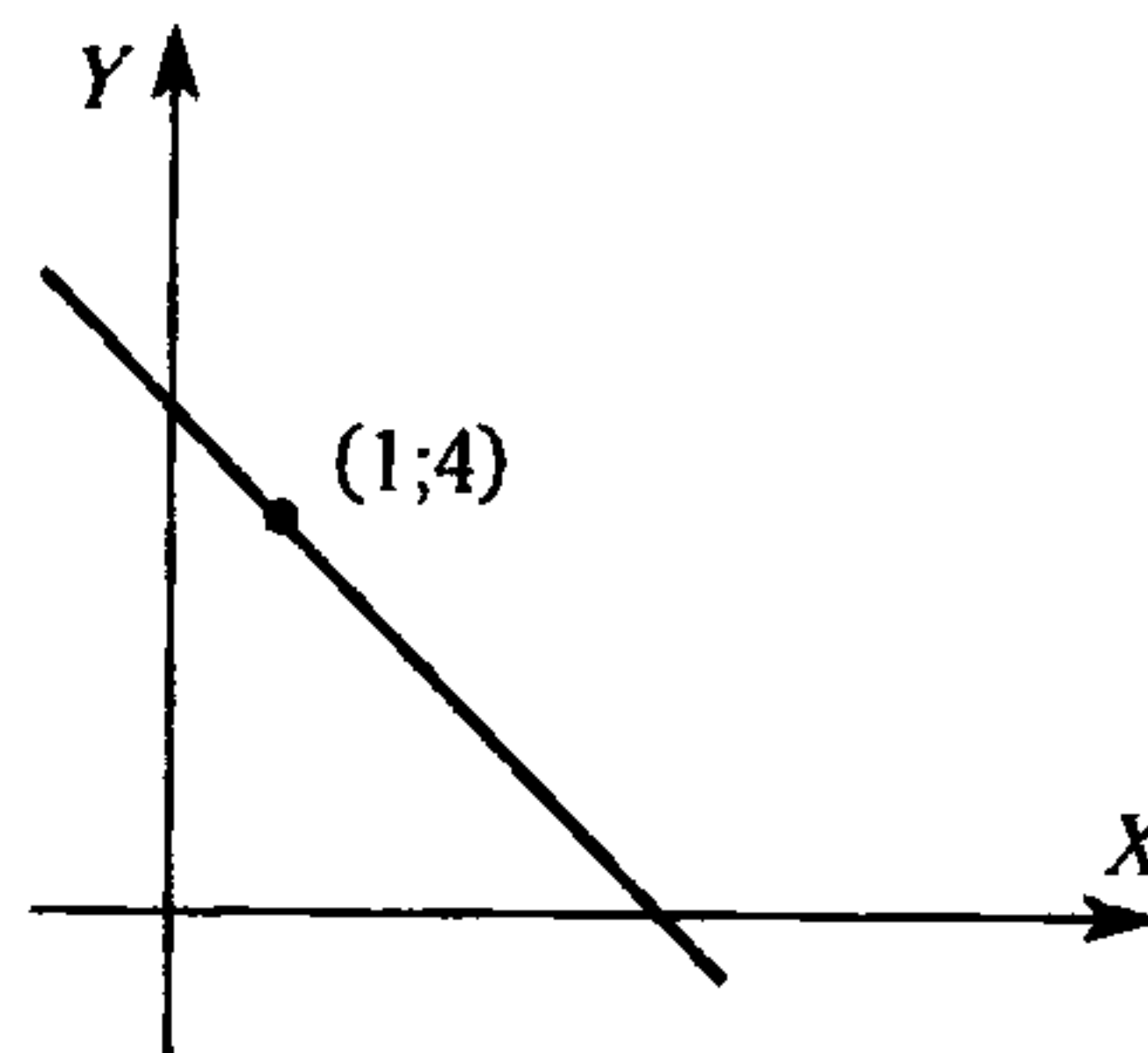
Gráfica de  $I(x)$



Respuesta: # alumnos: 225

**Problema 25**

Trazar una recta de modo que pase por el punto  $(1, 4)$  como indica la figura; y que la suma de las longitudes de los segmentos cortados por dicha recta en los ejes coordenados sean las menores posibles. Indicar la recta  $L$ .





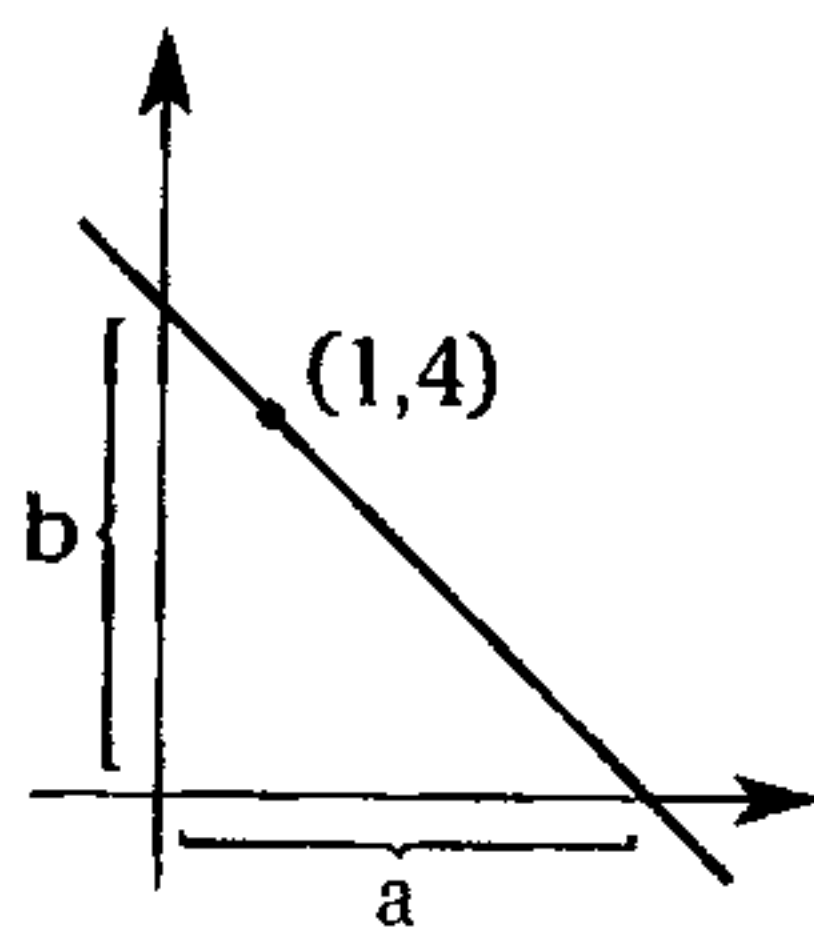
**Resolución:**Sea  $S = a + b \dots\dots (1)$ 

$$L = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$(1, 4) \in L$$

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$$

$$\therefore b = \frac{4a}{a-1} \dots\dots (2)$$



$$(2) \text{ en } (1): \quad S(a) = \frac{a^2 + 3a}{a-1}$$

$$S'(a) = \frac{(a-3)(a+1)}{a-1}$$

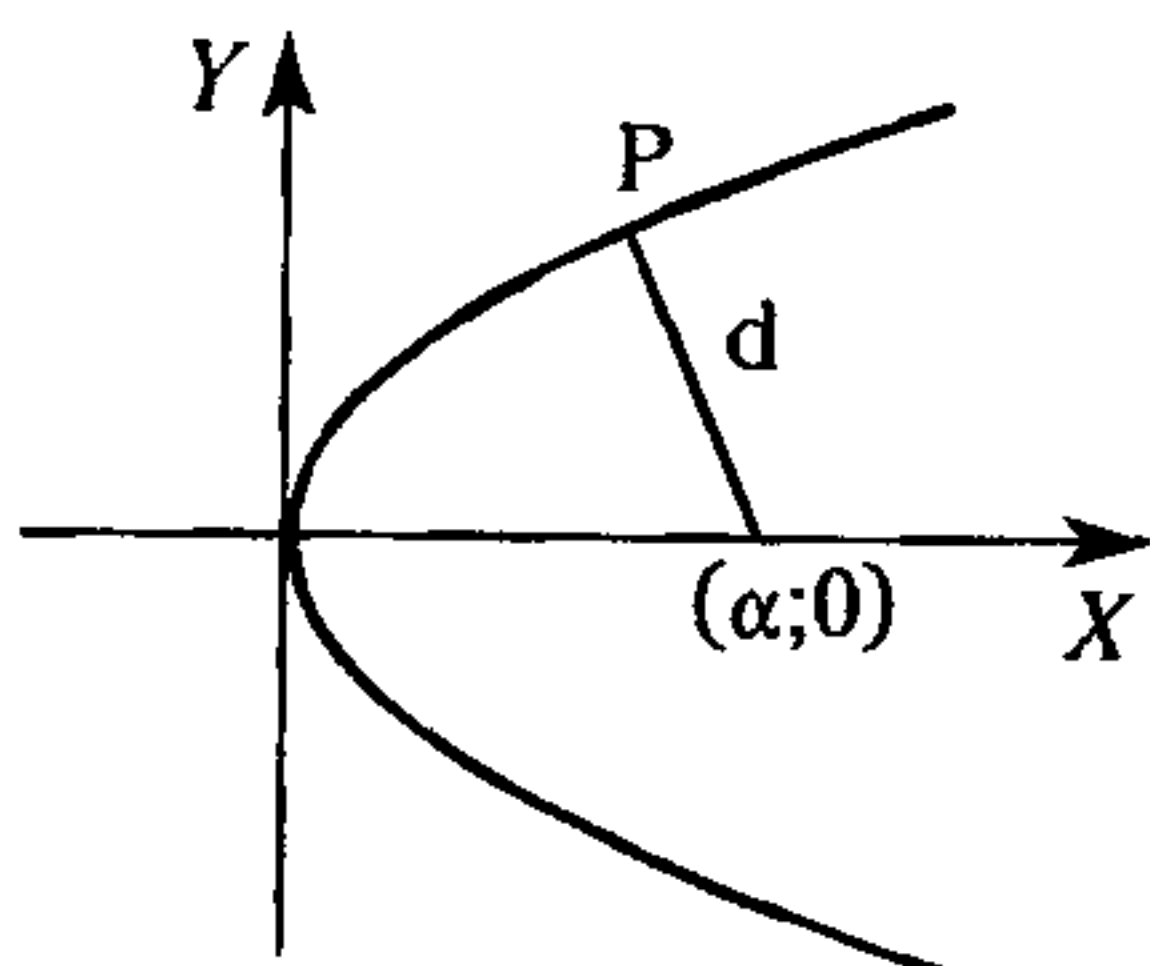
$$S'(a) = 0 \Rightarrow a = 3 \text{ ó } a = -1$$

$$\therefore a = 3 \wedge b = 6$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$$

**Problema 26**

Dada la parábola  $y^2 = 2px$  y un punto en su eje, a una distancia  $\alpha$  del vértice. Indicar la abscisa  $x$  del punto de la parábola más próximo al punto referido.

**Resolución:**

Sea  $d$  la distancia mínima del punto  $P(x; y)$  al punto  $A(\alpha, 0)$

$$d = \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + 2px}$$

Derivando se tiene:

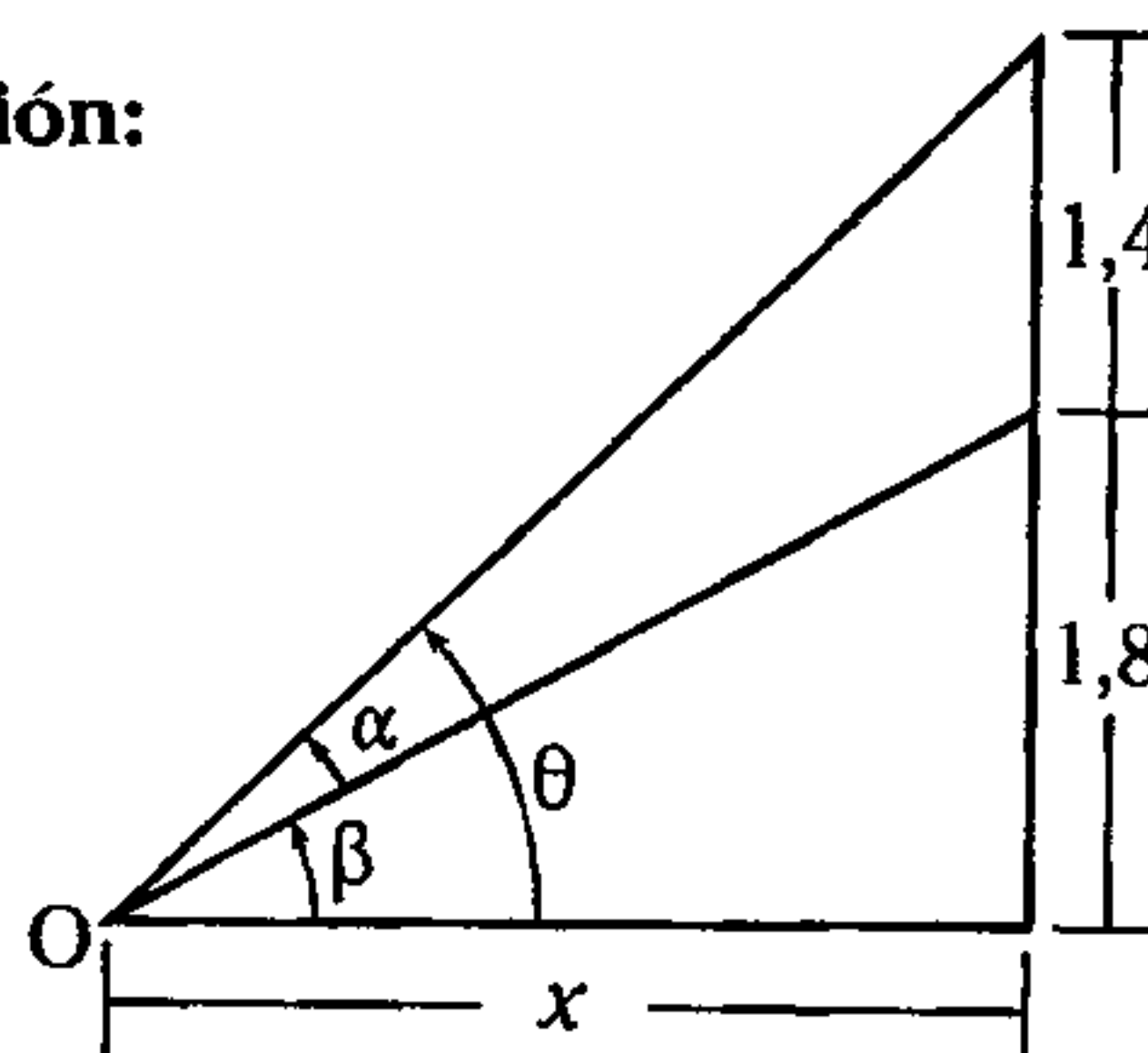
$$d'(x) = \frac{x - \alpha + p}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + 2px}} = 0$$

Para  $d'(x) = 0$ Se tiene  $x - \alpha + p = 0$ 

$$x = \alpha - p$$

**Problema 27**

Un cuadro de 1,4 m de altura cuelga de la pared de modo que su borde inferior está a 1,8 m por encima del radio de la vista del observador. A qué distancia de la pared debe situarse el observador para que su posición sea la más ventajosa para contemplar el cuadro (es decir, para que el ángulo visual sea mayor posible).

**Resolución:**

Sea  $\alpha$  el ángulo óptimo y sea  $x$  la distancia del observador a la pared.

$$\text{Del gráfico: } \cot \theta = \frac{x}{3,2} = \frac{5x}{16}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccot \left( \frac{5x}{16} \right)$$

$$\cot \beta = \frac{x}{1,8} = \frac{5x}{9}$$

$$\Rightarrow \beta = \arccot \left( \frac{5}{9}x \right)$$

$$\alpha = \theta - \beta \Rightarrow \alpha(x) = \arccot \left( \frac{5x}{16} \right) - \arccot \left( \frac{5x}{9} \right)$$

$$\alpha'(x) = \frac{-80}{256 + 25x^2} + \frac{45}{81 + 25x^2}$$

$$\text{Si } \alpha'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{80}{256 + 25x^2} = \frac{45}{81 + 25x^2}$$

$$\therefore x^2 = \frac{144}{25} \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

### Problema 28

$$\text{Si } \frac{nb^{n-1}(a-b)}{a^n - b^n} < k \quad k \in \mathbb{Z}$$

además

$$R > \frac{a^n - b^n}{na^{n-1}(a-b)} \quad R \in \mathbb{Z}$$

Calcule mínimo (k) más mínimo (R)+1  
(Sugerencia: aplique el teorema de Lagrange)

### Resolución:

$$\text{Sea } f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

f es continua en [b; a] y derivable en <a; b>  
 $\therefore$  por el teorema de Lagrange (valor medio)

$$\exists c \in <b; a> / f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$\therefore nc^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b} \Rightarrow n(a-b)c^{n-1} = a^n - b^n$$

$$\text{Dado que } c \in <b; a> \rightarrow b < c < a$$

$$\text{Para } n > 1 \rightarrow n-1 > 0 \rightarrow b^{n-1} < c^{n-1} < a^{n-1}$$

$$\text{Si } a > b \rightarrow a - b > 0 \Rightarrow n(a-b) > 0$$

$$\therefore nb^{n-1}(a-b) < nc^{n-1}(a-b) < na^{n-1}(a-b)$$

$$\text{pero } nc^{n-1}(a-b) = a^n - b^n$$

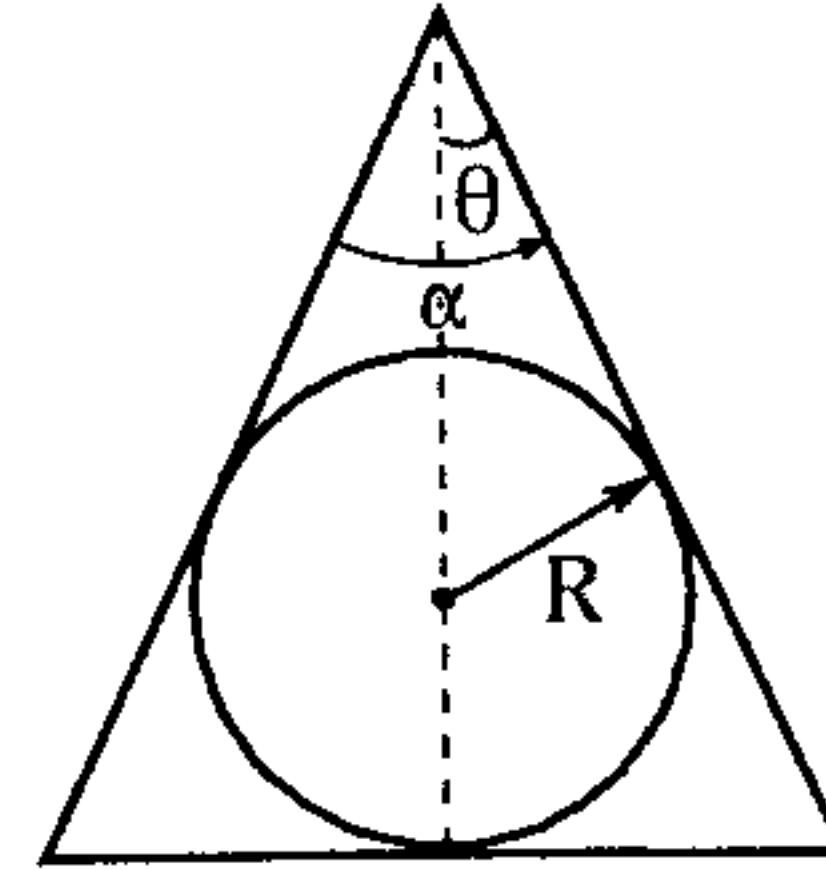
$$\therefore nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$$

$$\therefore k = 2; R = 2$$

Respuesta: 5

### Problema 29

Halle el ángulo  $\theta$  en la siguiente figura, sabiendo que el cono tiene la menor superficie lateral posible y que está circunscrito en torno a una esfera dada. Indique el  $\text{sen } \theta$



### Resolución:

Sea S la superficie lateral óptima.

Sean x e y el radio y la generatriz del cono.

$$\alpha = 2\theta$$

$$S = \pi rg = \pi xy$$

$$y = \overline{AD} + \overline{DC}$$

$$\overline{DC} = \overline{BC} \therefore y = R \cot \theta + x$$

$$\text{en } \Delta_{ABC} \quad y = x \csc \theta$$

$$\therefore x = \frac{R \cos \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$y = \frac{R \cot \theta}{1 - \sin \theta}$$

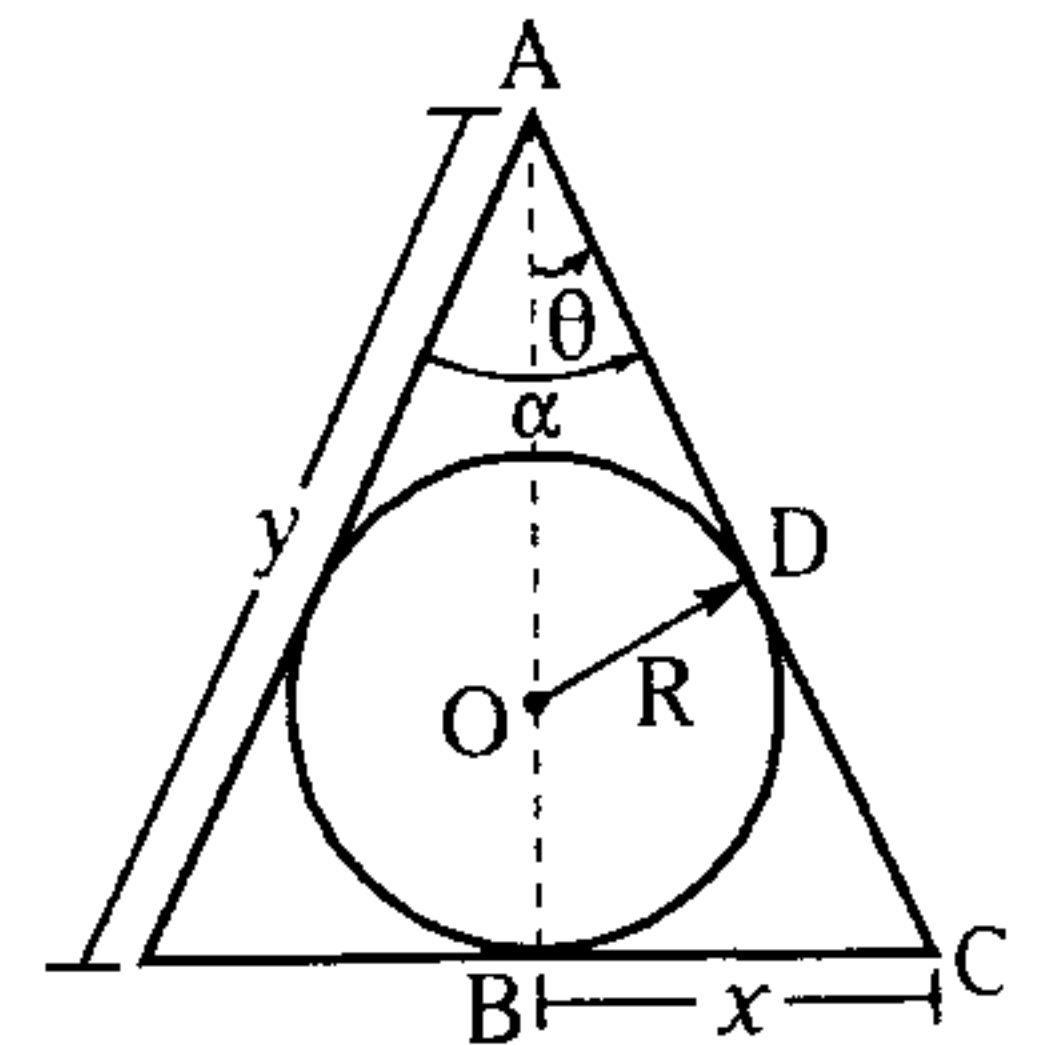
$$\therefore S_0 = \frac{\pi R^2 \cos \theta \cot \theta}{(1 - \sin \theta)^2} = \frac{\pi R^2 (1 + \sin \theta)}{(1 - \sin \theta) \sin \theta}$$

$$\therefore S'_\theta = \pi R^2 \left[ \frac{\cos \theta (\sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1)}{(\sin \theta - \sin^2 \theta)^2} \right]$$

$$\text{Si } S'(\theta) = 0$$

$$\therefore \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\sin \theta = \sqrt{2} - 1$$



**Problema 30**

Respecto a la función:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 2$$

Indicar verdadero (V) o falso (F).

- I. Es univalente en  $\langle -\infty; -\sqrt{2} \rangle$
- II. Existe un cero en  $\langle 2; 9 \rangle$
- III. Tiene un máximo relativo en  $1/2$ ; dos mínimos en  $-1$  y  $2$ .

**Resolución:**

Tenemos:

$$I. \quad f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$$

Factorizando:

$$f'(x) = (x+1)(2x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \left\{ -1; \frac{1}{2}; 2 \right\}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left\langle -1; \frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}; 2 \right\rangle$$

Si  $x \in \langle -\infty; -\sqrt{2} \rangle$  es decreciente

Entonces, es univalente (V)

II. Por el Teorema del cero

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = (-1) \\ f(9) = (+) \end{array} \right\} \exists \text{ una raíz en } \langle 2, 9 \rangle$$

(V)

III. Calculamos  $f''(x) = 12x^2 - 12x - 6$ 

$$\text{Como } f'(x) = 0 \Rightarrow x = \left\{ -1; \frac{1}{2}; 2 \right\}$$

Además:

$$f''(-1) > 0 \Rightarrow f(-1) \text{ es mínimo}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ es máximo}$$

$$f''(2) > 0 \Rightarrow f(2) \text{ es mínimo}$$

(V)

**Problema 31**Halle el valor de  $k$  para que  $f$  sea continua en  $\mathbb{R}$ 

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^{2001} - 1}{x} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$$

**Resolución:**

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} = k$$

Haciendo  $n=2001$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{1+x-1} \text{ por cocientes notables se}$$

tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} ((1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + 1) = n = 2001$$

$$\therefore k = \lim_{x \rightarrow 0} = 2001$$

**Problema 32**Dados  $a$ ;  $b$  constantes si:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ ax+b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Halle  $a$ ,  $b$  si  $f'(2)$  existe.**Resolución:**Como  $f$  es derivable, entonces,  $f$  es continua en  $2$ .

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$2a+b=4 \dots\dots\dots (1)$$

$$f'(x) = f'(x)$$

$$x = 2^+ \quad x = 2^-$$

$$\Rightarrow a = 2(2) = 4 \dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando  $b=-4$

**Problema 33**

Si:  $f(\theta) = \arctan(\arctan(\arctan \theta))$ . Halle  $f'(\theta)$

**Resolución:**

Tomando tangentes a ambos miembros:

$$\tan(f(\theta)) = \arctan(\arctan \theta)$$

Derivando

$$\sec^2(f(\theta))f'(\theta) = \left( \frac{1}{1 + \arctan^2 \theta} \right) \left( \frac{1}{1 + \theta^2} \right)$$

Despejando  $f'(\theta)$

$$f'(\theta) = \frac{1}{\sec^2(\arctan(\arctan(\arctan \theta)))(1 + \arctan^2 \theta)(1 + \theta^2)}$$

**Problema 34**

Si  $\frac{(n-1)!}{f^n(x)} = 729$

Donde:  $f(x) = \ln(x+1)$ ,  $f^n(x)$  enésima derivada.

Halle  $x+n$

**Resolución:**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, f''(x) = -(1+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} \text{ sucesivamente}$$

$$f^n(x) = (-1)^n(n-1)!(1+x)^{-n}$$

de donde  $n$  debe ser par

$$\frac{(n-1)!}{f^n(x)} = (1+x)^n = 3^6 = (1+2)^6$$

$$\therefore x = 2, n = 6$$

$$\Rightarrow x+n = 8$$

**Problema 35**

Halle  $y''$  cuando  $y=g(x)$  donde  $y=t+t^2$ ,  $x=t-t^2$

**Resolución:**

Las derivadas parciales

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 1+2t$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 1-2t$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1+2t}{1-2t}$$

Derivando  $y'$

$$y'' = \frac{2(1+2t) - (-2)(1+2t)}{(1-2t)^2}$$

$$\therefore y'' = \left( \frac{2}{1-2t} \right)^2$$

**Problema 36**

Halle el ángulo de intersección de las parábolas dadas:

$$y = x^2 - 3x + 6 \quad \wedge \quad y = 2 + 3x - x^2$$

**Resolución:**

La intersección:  $x^2 - 3x + 6 = 2x + 3x - x^2$

$$\therefore 2x^2 - 6x + 4 = 0 \quad \therefore x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \quad \therefore x = 2 \vee x = 1$$

Reemplazando tenemos:

$$x = 2 \Rightarrow y = 4 \quad \text{para } x = 1 \Rightarrow y = 2$$

Los puntos son (2; 4) (1; 2)

Para hallar el ángulo de intersección

$$\tan \theta = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}$$

$(x_0, f(x_0))$  punto de intersección de  $C_1, C_2$

Derivando

$$f(x) = x^2 - 3x + 6 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(2) = 1$$

$$f'(1) = -1$$

$$g(x) = 2 + 3x - x^2 \Rightarrow g'(x) = 3 - 2x$$

$$g'(2) = -1$$

$$g'(1) = 1$$

$$\tan \theta = \frac{1 - (-1)}{1 + (-1)} = \text{no está definido en } (2; 4)$$

$$\tan \theta = \frac{-1 - (-1)}{1 - (-1)} = -1 \therefore \theta = \arctan(-1)$$



**Problema 37**

Dado  $g(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  si  $f$  es diferenciable en  $\mathbb{R}$ ,

$f'(-1) = 2$ . Halle  $g'(0)$

**Resolución:**

$$g(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad h(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$g(x) = f(h(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(h(x))h'(x)$$

$$h'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(x) = f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)$$

Evalutando en  $x=0$

$$g'(0) = f'(-1)\left(-\frac{2}{(-1)^2}\right) = (2)(-2) = -4$$

**Problema 38**

Dado  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Si  $f$  tiene mínimo en  $x=0$ , máximo en  $x=1$ , halle  $c$  y la relación entre  $a$  y  $b$ .

**Resolución:**

Dado  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

Como  $x=0$  es mínimo  $c=0$

$$\therefore x(3ax + 2b) = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \wedge x = \frac{-2b}{3a} = 1$$

$$\therefore b = -\frac{3}{2}a$$

Respuesta:  $c=0 \wedge b = -\frac{3}{2}a$

**Problema 39**

Halle  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+x^2}$

**Resolución:**

Hagamos  $y = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$

$$\ln y = \frac{1}{3} \ln(1+x^2) \text{ tomando límites}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \ln(1+x^2) = \infty \cdot 0$$

$$\text{Calculamos el límite } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

$$\text{Por H'ospital } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = 0 \Rightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow 0} y) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} y = 1$$

**Problema 40**

Halle la ecuación de la parábola  $y = x^2 + bx + c$  que es tan a la recta  $y = x + 1$  en el punto  $(2; 4)$

**Resolución:**

Las derivadas en dicho punto son iguales  $y = x + 1$

$$\therefore y' = 1 \dots\dots (1)$$

$$y = x^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2x + b \dots\dots (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow 2x + b = 1$$

$$b = 1 - 2x \dots\dots (3)$$

Como  $(2, 4)$  pertenece a la parábola y a la recta  $x=2, y=4$  en la parábola  $4 = 2^2 + 2b + c \therefore 2b + c = 0$

$$\text{En (3): } b = 1 - 2(2) = -3 \therefore c = 6$$

$\Rightarrow y = x^2 - 3x + 6$  es la ecuación pedida.

**Problema 41**

Calcular en forma aproximada:

$$\sqrt[7]{\frac{201}{202}}$$

**Resolución:**

Asumimos:  $f(x) = \sqrt[7]{x}$

$$\text{Como: } \frac{201}{202} = 1 - \frac{1}{202}$$

Tomamos  $a=1$ ,  $\Delta x = -\frac{1}{202} = dx$

Por diferenciales se sabe:

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a) dx$$

Donde:  $f'(x) = \frac{1}{7} x^{-6/7}$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{7}$$

$$\therefore f\left(1 + \left(-\frac{1}{202}\right)\right) = f(1) + f'(1)\left(-\frac{1}{202}\right)$$

$$f\left(\frac{201}{202}\right) = 1 + \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{202}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt[7]{\frac{201}{202}} = \frac{1413}{1414} = 0,99929$$

### Problema 42

Dada la función:

$$f(x; y) = x^2 y + 10$$

Halle  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y}$

**Resolución:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

### Problema 43

Halle la pendiente de la recta normal a la curva:

$$y^2 x + y x^2 = 2 \quad \text{cuando } x=1$$

**Resolución:**

De la condición:  $y^2 x + y x^2 = 2$  derivando ambos miembros.

$$y^2 + x(2yy') + 2xy + x^2 y' = 0$$

Como  $x=1$ , entonces  $y=1$ .

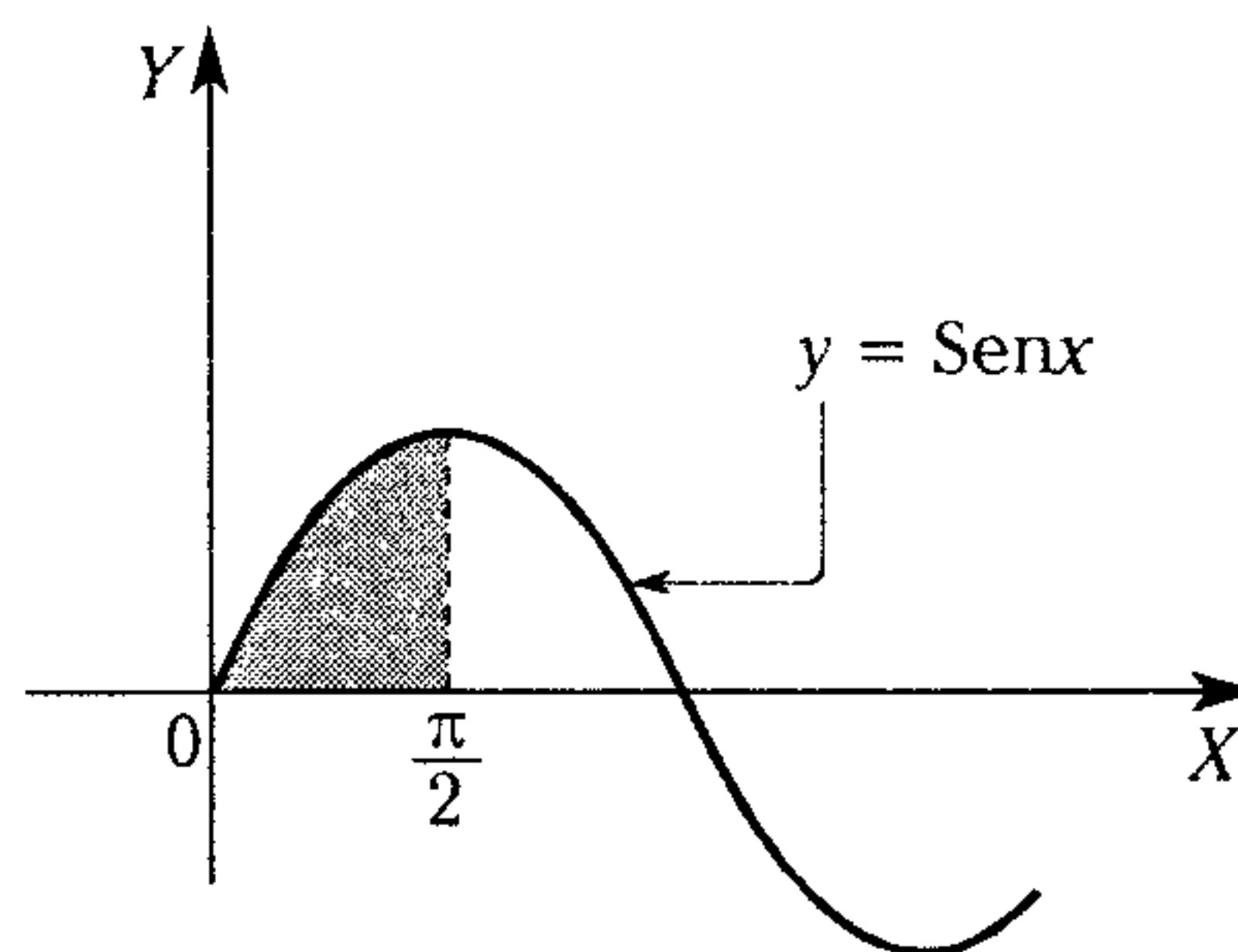
Reemplazando:

$$1 + 2y' + 2 + y' = 0 \Rightarrow y' = -1$$

$\therefore -1$ , es la pendiente de la recta tangente y 1 es la pendiente de la recta normal.

### Problema 44

Calcular el área de la región sombreada:



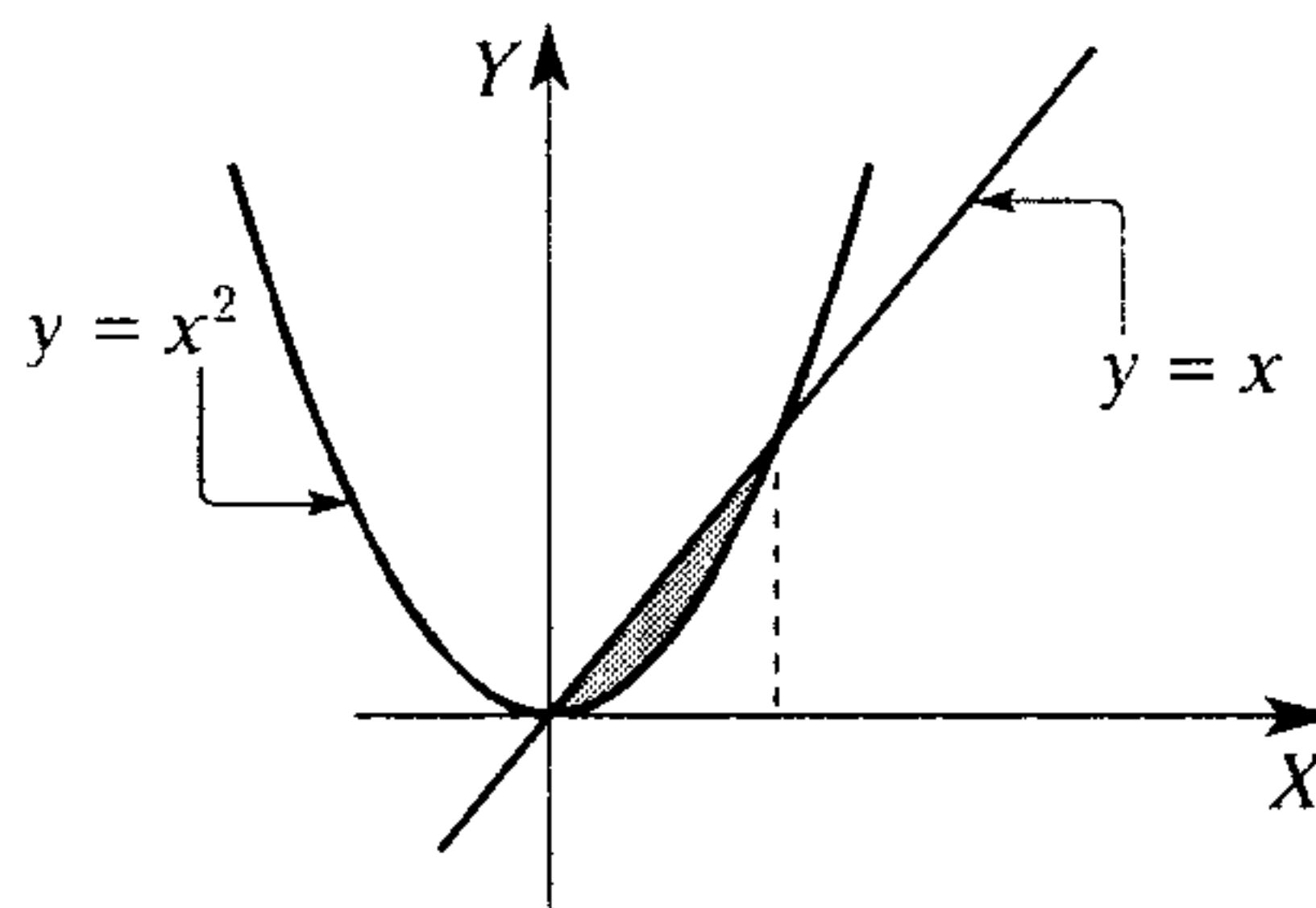
**Resolución:**

$$A = \int_0^{\pi/2} (\text{sen } x) dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$A = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0^\circ) = 0 + 1 = 1 \text{ u}^2$$

### Problema 45

Calcular el área de la región sombreada.



**Resolución:**

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$A = \left( \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left( \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{1}{6} \text{ u}^2$$

# Problemas Propuestos

1. Calcule la derivada de la función:

$$y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

en el punto  $x_0 = -3$

- A) 0                      B) 2                      C) 5  
D) 1                      E) 4

2. Calcule la derivada de la función:

$$y = (x-a)(x-b)(x-c), \text{ en el punto } x_0 = a$$

- A)  $(a-b)(a-c)$                       B)  $(a-c)(a+b)$   
C)  $(a+b)(c)$   
D)  $(2a+b)$                       E)  $(a-b)$

3. Calculen la derivada de la función:

$$y = \frac{x-a}{x-b}, \quad a \neq b, \text{ en el punto } x_0 = a$$

- A)  $\frac{2}{(a-b)}$     B)  $\frac{1}{(a-b)}$     C)  $(a+b)$   
D)  $(a-b)$     E)  $\frac{1}{(a+b)}$

4. Calcule la derivada de la función:

$$y = (1+ax^b)(1+bx^a), \text{ en el punto } x_0 = 1$$

- A)  $(a-b+2)$                       B)  $ab(a+b)$   
C)  $ab(a+b+2)$   
D)  $(a-b)$                       E)  $(a+b)(a-b)$

5. Calcule la derivada de la función:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

- A)  $-xe^{-x^2/2}$     B)  $-xe/2$     C)  $-xe^{-x^2/4}$   
D)  $xe^{x^2/3}$                       E)  $xe^{-x^2}$

6. Calcule la derivada de la función  $y = 2^{\sin 2x}$

- A)  $\ln 2 \cdot \sin x \cdot 2^{\sin 2x}$   
B)  $\sin x \cdot 2 \sin x$   
C)  $2^{\sin 2x} \cdot \sin x$   
D)  $\ln 2 \cdot \sin x$   
E)  $2 \ln 2 \cdot \cos 2x \cdot 2^{\sin 2x}$

7. Calcule la derivada de la función:

$$y = \ln \left[ \ln \left( \frac{x}{2} \right) \right]$$

- A)  $x \ln \left( \frac{x}{2} \right)$   
B)  $\frac{1}{x \ln \left( \frac{x}{2} \right)}, \quad x > 2$   
C)  $\ln x$   
D)  $\frac{1}{\left( \frac{x}{2} \right)}$   
E)  $\frac{x \ln x}{2}$

8. Calcule la derivada de la función:

$$y = \ln |\sin x|$$

- A)  $\sin x$                       B)  $\ln x$                       C)  $\ln \sin x$   
D)  $\cot x$                       E)  $\sec \ln x$

9. Calcule la derivada de la función

$$y = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})$$

- A)  $\frac{\ln x}{2x}$                       B)  $\frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}}$                       C)  $\frac{x}{\ln x}$   
D)  $\sqrt{x+1} \ln x$                       E)  $2x \ln x$

10. Calcule la derivada de la función:

$$y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

- A)  $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{(1-x)/(1+x)}}$   
 B)  $(1+x)\sqrt{x}$   
 C)  $e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$   
 D)  $-1$   
 E)  $e^{(1+x)}$

11. Calcule la derivada de la función:

$$y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$$

- A)  $\frac{1}{\sin x}$     B)  $\sin x$     C)  $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$   
 D)  $\cos x$     E)  $-\frac{1}{\cos x}$

12. Calcule la derivada de la función:

$$y = x^{x^2}$$

- A)  $x^x + x^2$   
 B)  $x^{1+x^2}(1+2\ln x)$   
 C)  $x^{1+x^2}$   
 D)  $\ln x$   
 E)  $2\ln x^{1+x^2}$

13. Calcule la derivada de la función:

$$y = x^{e^x}$$

- A)  $x^{e^x}$     B)  $e^x \cdot x^{e^x}$     C)  $\frac{1}{\ln x}$   
 D)  $x^{e^x} \cdot e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right)$     E)  $e^x$

14. Calcule la derivada de la función

$$y = 2^{x^x}$$

- A)  $(\ln 2)2^{x^x} \cdot x^x(1+\ln x)$   
 B)  $(\ln 2)2^{x^x}$   
 C)  $\ln 2^{x^x}$   
 D)  $2^{x^x}$   
 E)  $1+\ln x$

15. Calcule la derivada de la función:

$$y = x^{x^x}$$

- A) 1  
 B)  $x^{x^x} \cdot x^{x-1} (x \ln^2 x + x \ln + 1)$   
 C)  $x^{x^x} \cdot x^{x-1}$   
 D)  $\ln^2 x^{x^x}$   
 E) 0

16. Determine los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  con los que la función:

$$y = \begin{cases} \arctan \alpha x & ; \text{ si } |x| \leq 1 \\ \beta \operatorname{sign} x + \frac{x-1}{2} & ; \text{ si } |x| > 1 \end{cases}$$

tiene derivadas:

1. En el punto  $x=1$
2. En el punto  $x=-1$

- A) 1.  $\alpha=1, \beta=\frac{\pi}{4}$ ;    2.  $\alpha=1, \beta=\frac{(\pi-4)}{4}$   
 B) 1.  $\alpha=2, \beta=0$     2.  $\alpha=0, \beta=1$   
 C) 1.  $\alpha=1, \beta=\pi$     2.  $\alpha=1, \beta=\frac{\pi}{4}$   
 D) 1.  $\alpha=\frac{\pi}{2}, \beta=1$     2.  $\alpha=0, \beta=\pi$   
 E) 1.  $\alpha=0, \beta=1$     2.  $\alpha=0, \beta=\frac{\pi}{2}$



17. Determine los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  con los que las siguientes funciones son por todo lugar derivables.

$$y = \begin{cases} \alpha x + \beta & ; \text{ si } x \leq 1 \\ x^2 & ; \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

- A)  $\alpha = 1, \beta = -1$   
 B)  $\alpha = 0, \beta = 2$   
 C)  $\alpha = 2, \beta = -1$   
 D)  $\alpha = -1, \beta = 0$   
 E)  $\alpha = x, \beta = 1$

18. Escriba la ecuación de la tangente a la curva en el punto  $M(-1; 3)$ :  $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$

- A)  $5x + 6y - 13 = 0$   
 B)  $x + y - 13 = 1$   
 C)  $x - y = 0$   
 D)  $x + y = 2$   
 E)  $x + 2y = 0$

19. Escriba la ecuación de la tangente a la curva en el punto  $(1; 1)$ :  $x^5 + y^5 - 2xy = 0$

- A)  $x - y + 2 = 1$   
 B)  $x + 1 = 1$   
 C)  $x + y - 2 = 0$   
 D) 0  
 E) 1

20. Escriba la ecuación de la normal a la curva en el punto  $(x_0, y_0)$ :  $(4-x)y^2 = x^3$

- A)  $y - y_0 = 1$   
 B)  $(x - x_0) = 0$   
 C)  $(x - y) = x_0 - 2$   
 D)  $y - y_0 = -\frac{y_0(4-x_0)^2}{x_0^2(6-x_0)}(x - x_0)$   
 E)  $x - y = 1$

21. Escriba la ecuación de la normal a la curva en el punto  $(a; b)$ :  $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{x}{b}\right)^n = 2$

- A)  $x - by = 0$   
 B)  $a^2 - b^2 = x + y$   
 C)  $a - b = x - y$   
 D)  $ax - by = a^2 - b^2$   
 E)  $(a + b)(a - b) = x - y$

22. El tren Moscú-Tbilisi recorre todo el camino, igual a 2400 km, en el transcurso de 44 horas 14 minutos. Determinen la velocidad media del tren.

- A) 50,2 km/h  
 B) 20 km/h  
 C) 54,3 km/h  
 D) 30,5 km/h  
 E) 10 km/h

23. Determine la velocidad si la posición viene dada por:  $x = 2t^2 + 3$  para  $t = 1$ .

- A)  $\pi$   
 B) 4  
 C) 2  
 D) 1  
 E)  $-\pi$

24. Un cuerpo de masa  $m = 1,5$  está en movimiento rectilíneo según la ley  $S(t) = t^2 + t + 1$ . Hallen la energía cinética del cuerpo 5 s después del comienzo del movimiento (la masa  $m$  se da en kg, el recorrido en metros)

- A) 90,75 J  
 B) 90,1 J  
 C) 10,75 J  
 D) 70 J  
 E) 30,10 J

25. Un punto está en movimiento por la parábola  $y = 8x - x^2$ , de modo que su abscisa varía según la ley  $x = \sqrt{t}$  ( $x$  se mide en metros,  $t$  en segundos). ¿Cuál será la velocidad de variación de la ordenada del punto 9 segundos después de comenzar el movimiento?

- A) 1 m/s  
 B) 1/2 m/s  
 C) 1/3 m/s  
 D) 2 m/s  
 E) 1/4 m/s

26. El radio de un globo crece uniformemente a una velocidad de 5 cm/s. ¿Cuál será la velocidad de variación del volumen del globo en el momento cuando el radio se hace igual a 50 cm?

A)  $0,5 \pi \text{ m}^3/\text{s}$                       B)  $\pi \text{ m}^3/\text{s}$   
 C)  $2 \pi \text{ m}^3/\text{s}$   
 D)  $0,05 \pi \text{ m}^3/\text{s}$                       E)  $0,1 \pi \text{ m}^3/\text{s}$

27. Una rueda gira de tal manera que el ángulo de giro es proporcional al cuadrado del tiempo. La primera vuelta fue realizada en 8 s. Hallen la velocidad angular 64 s después del comienzo del movimiento.

A)  $7\pi \text{ rad/s}$                       B)  $\pi \text{ rad/s}$   
 C)  $\frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$   
 D)  $4\pi \text{ rad/s}$                       E)  $2\pi \text{ rad/s}$

28. Por el eje de abscisas se mueven dos puntos que tienen las siguientes leyes de movimiento.

$$x=100+5t \text{ y } x=t^2/2$$

¿A qué velocidad se separan uno de otro en el momento del encuentro ( $x$ , se mide en metros;  $t$ , en segundos).

A) 1 m/s                      B) 15 m/s  
 C) 10 m/s  
 D) 3 m/s                      E) 5 m/s

29. Un pontón flotante se atrae hacia la orilla con ayuda de un cable que se enrolla en un torno a una velocidad de 3 m/min. Determine la velocidad de movimiento del pontón cuando se encuentra a 25 m de la orilla a 4 m de altura sobre el nivel de agua.

A) 3 m/min                      B) 1 m/min  
 C) 2 m/min  
 D) 10 m/min                      E) 4 m/min

30. Hallar la derivada de segundo orden:

$$y = 1 + 10x + \frac{1}{x^{98}}$$

A)  $\frac{y}{x^{100}}$                       B)  $\frac{9702}{x^{100}}$   
 C)  $x^{100}$   
 D)  $\frac{9702}{x}$                       E)  $x$

31. Halle la derivada de segundo orden:

$$y = \cos^2 x$$

A)  $-2\cos 2x$                       B)  $-2\cos x$   
 C)  $\cos x$   
 D)  $2x$                       E)  $\cos 2x$

32. Un punto está en movimiento según la ley:

$$s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t^3 \text{ (s se mide en metros; } t, \text{ en segundos).}$$

Hallar su aceleración 5 s después de comienzo del movimiento.

A)  $10 \text{ m/s}^2$                       B)  $5 \text{ m/s}^2$   
 C)  $15 \text{ m/s}^2$   
 D)  $54 \text{ m/s}^2$                       E)  $20 \text{ m/s}^2$

33. Hallar el valor de la fuerza que actúa sobre un punto de masa  $m=0,1$  en movimiento según la ley  $s(t)=t^2-4t^4$ , en el momento de tiempo  $t=3$  ( $m$ ,  $s$ ,  $t$  están prefijadas en el sistema SI).

A) 10 N                      B) 43 N  
 C) 9 N  
 D) 11 N                      E) 20 N

34. Por una circunferencia de 5 m de radio está en movimiento un punto a velocidad angular constante de 2 rad/s. Halle el valor de la aceleración del punto.

A) 20 m/s<sup>2</sup>    B) 10 m/s<sup>2</sup>    C) 1 m/s<sup>2</sup>  
D) 5 m/s<sup>2</sup>    E) 15 m/s<sup>2</sup>

35. Calcule el límite de la función:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}$$

A) 4    B)  $\frac{1}{9}$     C)  $\frac{1}{3}$   
D)  $\frac{1}{2}$     E) 1

36. Calcule el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{2x^2 - 5x - 3}$$

A)  $\frac{1}{2}$     B) 1    C)  $\frac{6}{7}$   
D) 2    E) 1

37. Calcule el límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{x^2}$

A)  $\frac{a}{2}$     B)  $a^2$     C)  $\frac{1}{a}$   
D)  $-\frac{a^2}{2}$     E)  $a$

38. Calcule el límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}$

A)  $\frac{1}{2}$     B) 1    C)  $\tan x$   
D)  $x$     E)  $-\frac{1}{2}$

39. Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \tan x}{\cot 2x}$$

A) -1    B) 1    C) 0  
D)  $\tan x$     E)  $\cot 2x$

40. Calcule el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$$

A) 0    B) 1    C) -1  
D)  $\frac{1}{2}$     E)  $\ln x$

41. Calcule el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$$

A)  $\frac{1}{4}$     B) 1    C) 0  
D)  $\frac{15}{4}$     E)  $\sqrt{x}$

42. Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\tan x - x}$$

A) 0    B)  $x$     C)  $\frac{1}{2}$   
D)  $\operatorname{sen} x$     E)  $\frac{1}{2}x$

43. Calcule el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\ln(1+x) - x}{e^x - x - 1}$$

A) 1    B)  $e$     C)  $x$   
D) -1    E)  $(x+1)$

44. Calcule el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^2 \arcsen x}$$

- A)  $\frac{1}{2}$       B) 0      C)  $-\frac{4}{3}$   
D) 1      E)  $x$

45. Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$$

- A) 1      B)  $\sin x$       C)  $x$   
D) 0      E) -1

46. Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\cot x}$$

- A) -1      B) 0      C)  $\frac{1}{2}$   
D) 1      E)  $x$

47. Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^3}$$

$n$  es impar.

- A)  $e$       B) 1      C)  $x^n$   
D) 0      E) -1

48. Calcule el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x^x - 1) \ln x$$

$n$  es un número par

- A) 1      B)  $x^x$       C)  $\ln x$   
D) -1      E) 0

49. Calcule el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$$

- A)  $e$       B)  $x$       C) 1  
D) -1      E) 0

50. Calcule el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$$

- A) 1      B) 3      C) 2  
D)  $x$       E)  $\frac{1}{2}$

51. Calcule el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +0} (1/x)^{\sin x}$$

- A) -1      B)  $-\frac{1}{2}$       C) 1  
D)  $x$       E)  $\sin x$

52. Halle la mayor área del rectángulo inscrito en un círculo de radio  $R$ .

- A)  $R^2$       B)  $4R$       C)  $R$   
D)  $\frac{1}{2}R^2$       E)  $2R^2$

53. Halle en la hipérbola:

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$$

el punto más próximo al punto (3; 0)

- A) (2; 1)      B) (1; 1)  
C) (1; 2)  
D) (-1; 1)      E) (3; 0)





61. Calculen el volumen máximo de un cilindro, cuyo perímetro en la sección axial es igual a "a".

A)  $\frac{\pi a^3}{216}$       B)  $\frac{\pi}{3}$       C)  $a^3$   
 D)  $\frac{a}{216}$       E) 1

62. Una lata de conservas tiene forma cilíndrica. Hallen las más ventajosas dimensiones de la lata, es decir, determinen la razón entre el diámetro de la base y la altura del cilindro con la que tenga el volumen máximo con la superficie total prefijada.

A) 0      B) 3      C) 1  
 D) -2      E) -1

63. Determinar la razón entre el radio de la base y la altura de un cilindro que, con el volumen dado, tenga la superficie total mínima.

A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{1}{3}$   
 C)  $-\frac{1}{2}$   
 D) 1      E) -1

64. Hallar la altura del cono de volumen máximo, inscrito en una esfera de radio R.

A)  $\frac{R}{3}$       B) R      C)  $\frac{4R}{3}$   
 D) 4R      E)  $\frac{R}{2}$

65. Hallar el volumen máximo de un cono con la generatriz  $l$  dada.

A)  $2\pi l^3 \frac{\sqrt{3}}{27}$       B)  $2\pi l$   
 C)  $2\pi\sqrt{3}$   
 D)  $\pi$       E)  $\pi\sqrt{3}$

66. Una piedra ha sido lanzada a velocidad inicial prefijada bajo el ángulo  $\alpha$  respecto al horizonte. Despreciando la resistencia del aire, determinen con qué  $\alpha$  la distancia de vuelo de la piedra será la máxima.

A)  $\pi$       B)  $-\frac{\pi}{2}$       C)  $\frac{\pi}{4}$   
 D)  $\frac{\pi}{2}$       E) 1

67. Hacia un río cuya anchura es igual a  $a$ , bajo ángulo recto, se ha construido un canal de anchura  $b$ . Halle la longitud máxima del tronco que puede pasar del río al indicado canal.

A)  $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$       B)  $(a+b)$   
 C)  $(a-b)$   
 D)  $(a+b)^{3/2}$       E)  $(a-b)^{3/2}$

68. Un recipiente con pared vertical de altura  $h$  se encuentra sobre un plano horizontal. De un orificio, en la pared del recipiente, fluye un chorro que será el máximo si la velocidad del líquido que fluye es igual  $\sqrt{2gx}$ , donde  $x$  es la profundidad del orificio (ley de Torricelli).

Halle  $\frac{h}{a}$

A)  $\frac{h}{3}$       B)  $h$       C)  $\frac{h}{2}$   
 D) 1      E)  $\sqrt{\frac{h}{2}}$

69. Una carga que yace sobre el plano horizontal P ha de desplazarse con una fuerza por el plano P, con qué valor de la fuerza será el mínimo si el coeficiente de rozamiento de la carga es igual a k.

A)  $\tan k$                       B)  $\arctan k$   
 C)  $\arcc k$   
 D)  $k$                           E)  $\cot k$

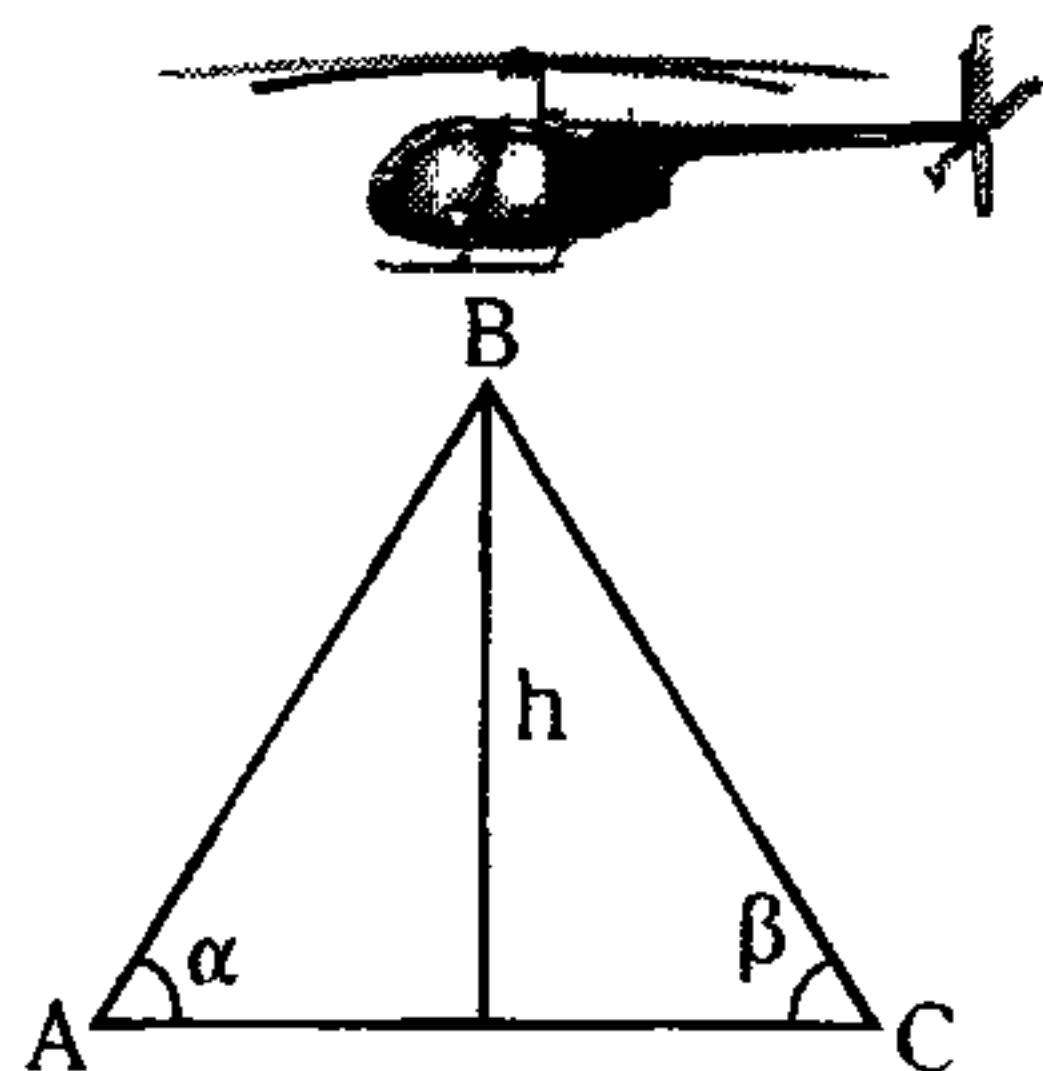
70. Un observador se encuentra frente a un cuadro colgado de una pared vertical. El borde inferior del cuadro está situado a una distancia a sobre el nivel de los ojos del observador; el borde superior, a una distancia b. ¿A qué distancia de la pared debe hallarse el observador para que el ángulo bajo, el que ve el cuadro, sea el máximo?

A)  $\sqrt{ab}$               B)  $ab$               C)  $\sqrt{a}$   
 D)  $\sqrt{a+b}$               E)  $\sqrt{b-a}$

71. Si el volumen de una esfera es de  $972\pi$ . Calcular cuanto más deberá aumentar su radio para que el área de la nueva esfera sea de  $576\pi$  (utilizando derivadas).

A) 1                      B) 3                      C) 5  
 D) 2                      E) 0

72. En la figura:

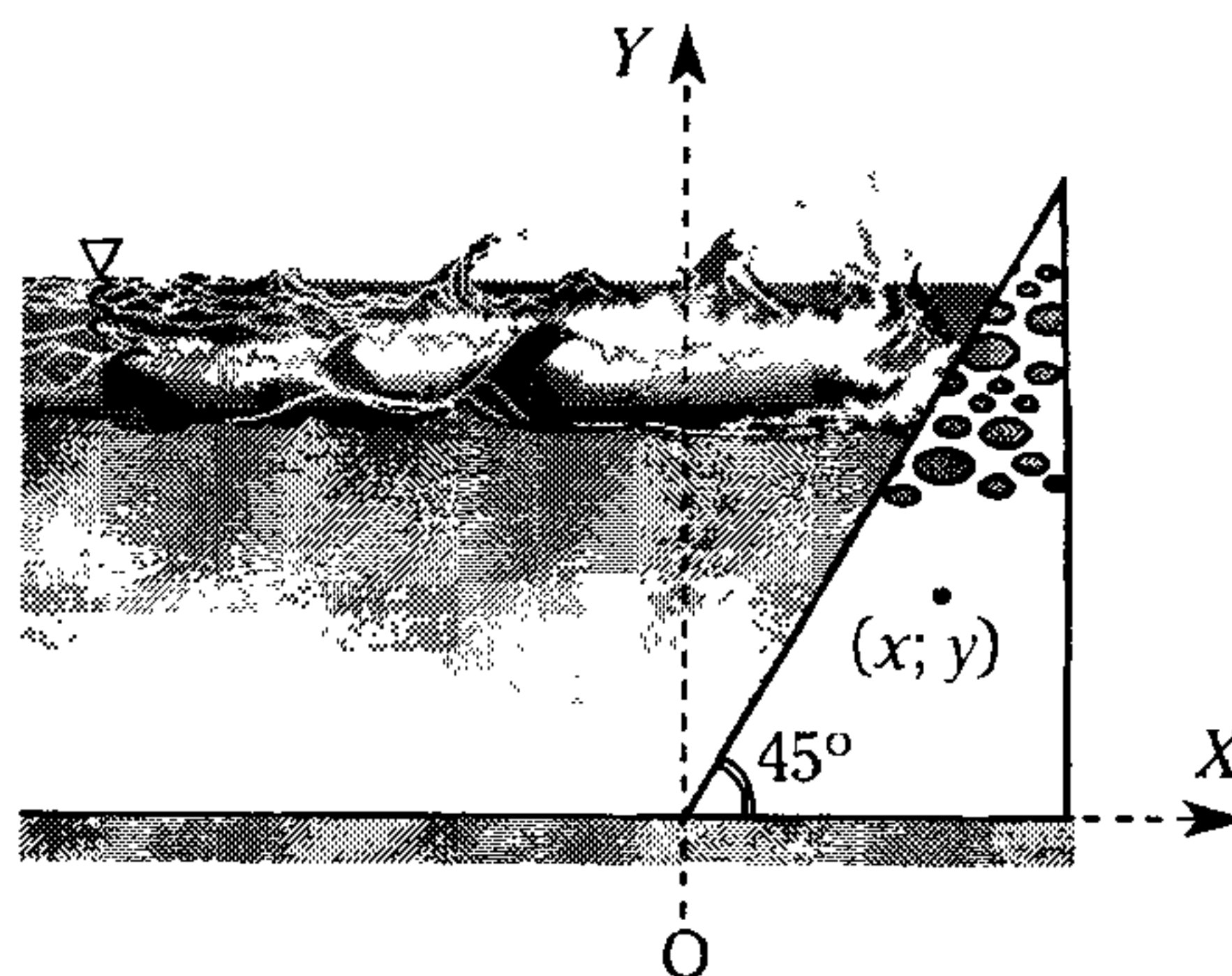


Se tiene un helicóptero volando una altura h y dos personas lo ven con ángulos de

elevación  $\alpha$  y  $\beta$ . Calcular la distancia entre ellos si la pendiente  $\alpha = y'_1$  pendiente  $\beta = y'_2$

A)  $h(y + y'_2)$                       B)  $\frac{h(y'_2 - y'_1)}{y_1 y_2}$   
 C)  $h(y - y'_2)$   
 D)  $h(y'_1 + y'_2)$                       E)  $h(\alpha + \beta)$

73. En la figura las olas golpean el dique siguiendo la siguiente ecuación:  
 $m^2 x^2 - (2m + n - 1)x + 1 = y$ ;  $(x; y)$  es un punto interior del dique.



Calcular el punto en la superficie de la pared en la dirección vertical del punto en el cual el dique es más afectado si  $\frac{n+1}{m-1} = 2m$

A) (1, 2)              B) (-1, 2)              C) (1, -2)  
 D) 1                      E) (1, 1)

74. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x + e^{2x})^{1/x}$$

A) 1                      B) 0                      C)  $+\infty$   
 D) e                      E)  $e^2$

75. Halle:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m}, \quad m, n \in \mathbb{Z}^+$$

- A) 1                      B)  $+\infty$                       C) 0  
D)  $\frac{n}{m}$                       E)  $\ln m^n$

A)  $\frac{\pi R^2}{2}$                       B)  $\pi R^2$

C)  $\frac{\pi R^2 \sqrt{3}}{4}$

D)  $\frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}$                       E)  $\frac{\pi R^2}{3}$

76. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}$$

- A) 1                      B) e                      C) -1  
D)  $e^{-1}$                       E)  $\frac{1}{2}$

77. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

- A)  $e^{\frac{2}{\operatorname{sen} a}}$                       B) e                      C)  $e^{-1}$   
D)  $e^{\operatorname{sen} a}$                       E) -1

78. Si un punto de una elipse inscrita en un semicírculo, está sobre el diámetro y tiene otros dos vértices sobre la semicircunferencia en posición simétrica, hallar el área máxima de la elipse, sabiendo que el radio del semicírculo es R.

79. Determinar los puntos de coordenadas enteras sobre la curva:

$$y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$$

$y=f(x)$  presenta tangente vertical.

- A) (1; -1)  
B) (1; 1)  
C) (-1; 1)  
D) (1; -1); (-1; 1)  
E) (1; 1); (-1; 1)

80. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \alpha x} + \sqrt[n]{1 + \beta x} - 2}{x}$$

- A)  $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$                       B)  $\alpha\beta$   
C) mn  
D)  $\alpha n + m\beta$                       E)  $\frac{\alpha\beta}{mn}$



1 **B**14 **A**27 **D**40 **B**2 **A**15 **B**28 **B**41 **C**3 **B**16 **A**29 **A**42 **C**4 **C**17 **C**30 **B**43 **A**5 **A**18 **A**31 **A**44 **C**6 **E**19 **C**32 **D**45 **A**7 **B**20 **D**33 **B**46 **B**8 **D**21 **D**34 **A**47 **D**9 **B**22 **C**35 **B**48 **E**10 **A**23 **B**36 **C**49 **A**11 **E**24 **A**37 **D**50 **B**12 **B**25 **C**38 **E**51 **C**13 **D**26 **D**39 **A**52 **E**

Claves

Colección

Álgebra

53 **A**

60 **C**

67 **A**

74 **E**

54 **C**

61 **A**

68 **C**

75 **C**

55 **D**

62 **C**

69 **B**

76 **B**

56 **A**

63 **A**

70 **A**

77 **A**

57 **A**

64 **C**

71 **B**

78 **C**

58 **D**

65 **A**

72 **B**

79 **E**

59 **A**

66 **C**

73 **E**

80 **A**

Claves