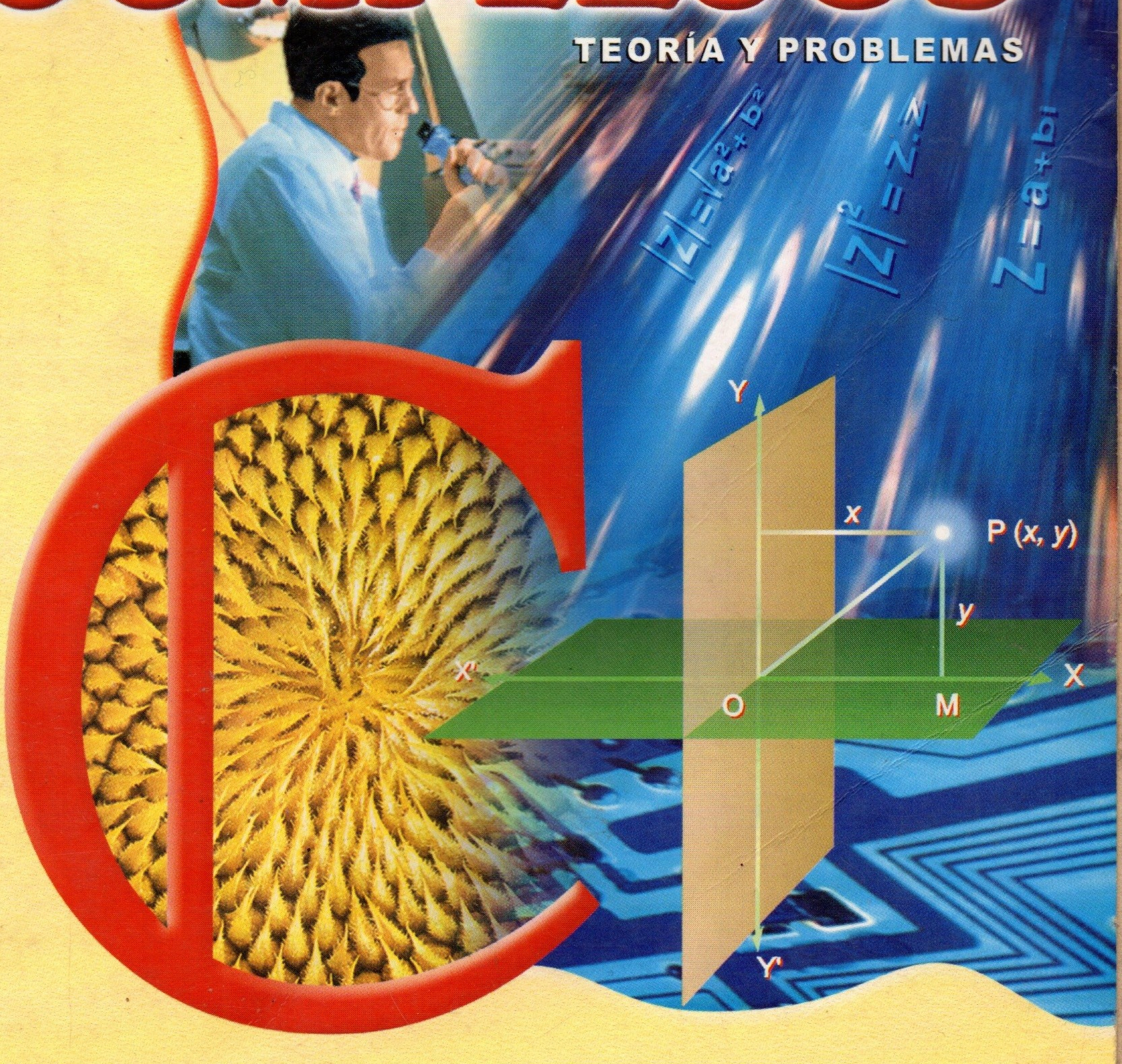
NÚMEROS COMPLEJOS

TEORÍA Y PROBLEMAS



ACADEMIA
CESAR VALLEJO
UNI

Índice

DEFINICIÓN

Llamaremos números complejos a todo par ordenado de números reales denotado por:

$$Z=(a\,;b)$$

Donde:

- "a" (Primera componente) se llama parte real de Z y se denota así: $Re(Z)=a$
- "b" (Segunda componente) se llama parte imaginaria de Z y se denota así: $Im(Z)=b$

  Pero en si: a y $b \in \mathbb{R}$

  El conjunto de los números complejos denotados por $\mathbb{C}$ se define así: $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (Producto cartesiano de los reales por los reales) es decir:

$$\boxed{\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a\,;b)/a\in\mathbb{R} \text{ y } b\in\mathbb{R}\}}$$

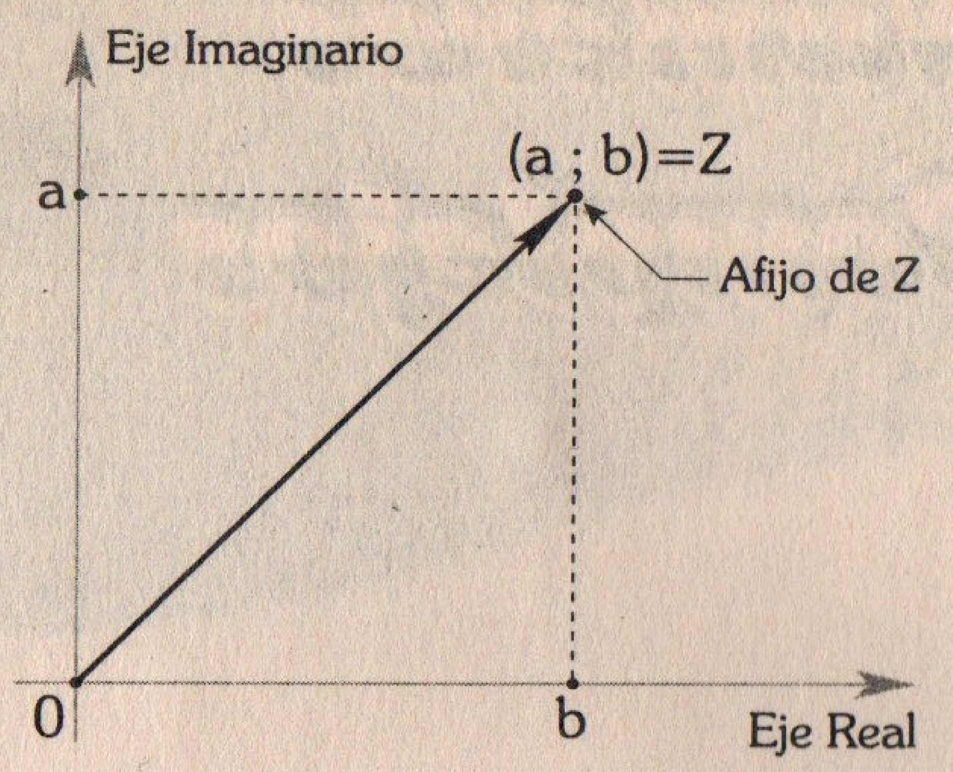
Observamos:

- Si: $Z=(4;-1)\in\mathbb{C} \Rightarrow Re(Z)=4\ ,\ Im(Z)=-1$
- Si: $W=(-\sqrt{2}\,;-\frac{1}{2}) \Rightarrow Re(\omega)=-\sqrt{2},\ Im(\omega)=-\frac{1}{2}$

Representación gráfica de un número complejo

Teniendo en cuenta que el Plano Complejo o Plano de Gauss, es aquel plano cartesiano donde el eje de las abscisas se llama eje de los reales y el eje de las ordenadas, eje imaginario, podemos decir: entre los números complejos y los puntos del plano de Gauss existe una correspondencia Biunívoca (uno a uno), donde todo número complejo $Z=(a\,;b)$ tiene una representación geométrica que viene dado por un segmento orientado (flecha), que tiene su origen, en el origen de coordenadas y su extremo en el punto $Z=(a;\,b)$ llamado este punto afijo de Z.

La representación geométrica de Z=(a ; b), donde a>0 y b>0 viene dado por la siguiente gráfica:



Número complejo real, Imaginario puro y complejo nulo

Dado el número complejo Z=(a ; b), será:

- Número complejo real ⇔ $\mathrm{Im}(Z)=b=0 \;\wedge\; a\neq 0$

> *Nota:*
> *El número complejo real Z=(a ; 0) equivale al número real a, es decir Z=(a ; 0)=a*

** Número complejo imaginario puro ⇔ $\mathrm{Re}(Z)=a=0 \;\wedge\; b\neq 0$

*** Número complejo nulo ⇔ $a=b=0$

Números complejos iguales

Dos números complejos son iguales si éstos poseen igual parte real e imaginaria respectivamente.

Es decir, siendo $Z_1=(a;b)$ y $Z_2=(c;d)$ / $Z_1, Z_2\in\mathbb{C}$

Se define: $Z_1=Z_2 \Leftrightarrow a=c$ y $b=d$

Números complejos opuestos

Dos números complejos son opuestos si éstos difieren tanto en el signo de su parte real como en el signo de su parte imaginaria.

Es decir, siendo Z = (a ; b), su opuesto denotado por $-Z$ ó Z^*

Se define así: $-Z=(-a;-b)$

Nota : $Z+Z^*=(0;0)$

Ejemplo:

El opuesto de Z=(–5 ; 6) es: –Z=(5 ; –6)

Números complejos conjugados

Dos números complejos son conjugados si éstos difieren sólo en el signo de su parte imaginaria.

Es decir, siendo Z = (a ; b), su conjugado denotado por $\overline{Z}$

Se define así: $\overline{Z}=(a;-b)$

Ejemplo:

El conjugado de $Z=\left(\frac{1}{2};-3\right)$ es $\overline{Z}=\left(\frac{1}{2};3\right)$

Operaciones en $\mathbb{C}$

En general, toda operación que se realice con números complejos, da como resultado otro número complejo. En algunos casos puede obtenerse un número complejo real, imaginario puro o nulo.

a) Adición de Números Complejos

La adición de dos (o más) números complejos da como suma otro número complejo cuya parte real viene dado por la adición de las partes reales de los sumandos y su parte imaginaria por la adición de las partes imaginarias de los mismos.

Es decir: si $Z_1=(a;b)$ y $Z_2=(c;d)$ son números complejos

$$\Rightarrow\; \boxed{Z_1+Z_2=(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)}$$

Ejemplo: Si $Z_1=(-3;1)$ y $Z_2=(1;-9)$ $\Rightarrow$ $Z_1+Z_2=(-2;-8)$

b) Sustracción de Números Complejos

Se define la diferencia de dos números complejos

Z_1 y Z_2 así: $Z_1-Z_2=Z_1+(-Z_2)$

Es decir: si $Z_1=(a;b)$ y $Z_2=(c;d)$ son números complejos

$$\Rightarrow\; \boxed{Z_1-Z_2=(a;b)-(c;d)=(a-c;b-d)}$$

Ejemplo: Si $Z_1=(2\sqrt{3};-4)$ y $Z_2=(\sqrt{3};4)$ $\Rightarrow$ $Z_1-Z_2=(\sqrt{3};-8)$

c) **Multiplicación de Números Complejos**

Siendo $Z_1=(a\,;b)$ y $Z_2=(c\,;d)$ números complejos, se define el producto de Z_1 y Z_2 así:

$$\Rightarrow \boxed{Z_1.Z_2=(a\,;b).(c\,;d)=(ac-bd\,;ad+bc)}$$

Ejemplo: Si $Z_1=(3\,;-2)$ y $Z_2=(-4\,;-1)$ $\Rightarrow$ $Z_1.Z_2=(-12-2\,;-3+8)=(-14\,;5)$

Propiedades:

- El elemento neutro multiplicativo es la unidad compleja, denotado así: $(1\,;0)=1$
- El elemento inverso multiplicativo de un número complejo
  $Z=(a\,;b)\neq(0\,;0)$ o recíproco de Z viene dado por:
  $Z^{-1}=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}\,;\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$, tal que $Z.Z^{-1}=(1\,;0)$
- Dado el número complejo $Z=(a\,;b)$ y $K\in\mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ $KZ=K(a\,;b)=(Ka\,;Kb)$

d) **División de Números Complejos**

Siendo $Z_1=(a\,;b)$ y $Z_2=(c\,;d)\neq(0\,;0)$, el cociente de Z_1 entre Z_2 viene dado por:

$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(a\,;b)}{(c\,;d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\,;\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)}$$

Ejemplo: Si $Z_1=(-3\,;4)$ y $Z_2=(2\,;3)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{Z_1}{Z_2}=\left(\dfrac{-6+12}{13}\,;\dfrac{8+9}{13}\right)=\left(\dfrac{6}{13}\,;\dfrac{17}{13}\right)$

Unidad imaginaria

El número complejo imaginario puro de 2da. componente igual a 1, se denomina unidad imaginaria y se denota por i.

Es decir : $\boxed{\text{Unidad Imaginaria}=i=(0\,;1)}$

Con la propiedad que: $\boxed{i^2=-1}$

Demostración:

$$\boxed{i^2=i.i=\underbrace{(0;1).(0;1)}_{\text{Multiplicación}}=\underbrace{(-1;0)}_{\text{Complejo Real}}=-1 \quad \therefore i^2=-1}$$

Notación de Euler: $\boxed{i^2=\sqrt{-1}}$

Algunas potencias de la unidad imaginaria

Sabemos que $i^1=i$ y hemos demostrado que $i^2=-1$, conociendo esto, podemos deducir todas las demás potencias de i, pero es recomendable que conozcamos como principales las siguientes:

$$i^1=i$$
$$i^2=-1$$
$$i^3=i^2.i=-i$$
$$i^4=(i^2)^2=1$$

De aquí se tiene: (I) $\boxed{i^1=i}\ \boxed{i^2=-1}\ \boxed{i^3=-i}\ \boxed{i^4=1}$

Además, sabemos que: $i^2=-1 \Rightarrow i=-\dfrac{1}{i} \Rightarrow -i=\dfrac{1}{i} \Rightarrow \boxed{-i=i^{-1}}$, de esta última igualdad, elevándola al cuadrado, al cubo, a la cuarta obtenemos lo siguiente:

(II) $\boxed{i^{-1}=-i}\ \boxed{i^{-2}=-1}\ \boxed{i^{-3}=i}\ \boxed{i^{-4}=1}$

Deducción de propiedades para potencias de i

1. Sabemos que: $i^4=1$ ($i \Rightarrow$ unidad imaginaria)

   Elevamos ambos miembros a la k (k es un número entero)

   $\Rightarrow i^{4K}=1^K \Rightarrow i^{4K}=1$, pero 4k es $\mathring{4}$ (múltiplo de 4)

   Podemos decir: la unidad imaginaria (i), elevada a exponentes divisibles por 4 o múltiplos de 4 es igual a 1; es decir: $\boxed{i^{\mathring{4}}=1}$ $\forall\ \mathring{4}$ positivo o negativo

   > *Nota : Recuerde que 4K es $\mathring{4}$, $\forall K\in\mathbb{Z}$*

   Ejemplos: Calcular i^{144} ; i^{-2000}

   * $i^{144}=i^{4(36)}=i^{\mathring{4}}=1 \Rightarrow i^{144}=1$
   * $i^{-2000}=i^{4(-500)}=i^{\mathring{4}}=1 \Rightarrow i^{-2000}=1$

2. Naturalmente que la unidad imaginaria (i), no siempre estará elevada exactamente a un $\mathring{4}$ (positivo o negativo), podría presentarse $i^{\mathring{4}+K}$ (K es número entero).

   Veamos: $i^{\mathring{4}+K}=i^{\mathring{4}}.i^K=1.i^K=i^K$

   Concluimos así: $\boxed{i^{\mathring{4}+K}=i^{K}}$ $\forall\ \mathring{4}$ positivo o negativo y K entero.

Ejemplo 1:

Calcular i^{9614}

Resolvamos:

Dividimos 9614 entre 4

$$\begin{array}{r|l} 9614 & 4 \\ \cline{2-2} 16 & 2403 \\ 14 & \\ 2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 9614=\underbrace{4(2403)}_{\overset{\circ}{4}}+2 = 9614=\overset{\circ}{4}+2$$

Luego tenemos :

$$i^{9614}=i^{\overset{\circ}{4}+2}=i^{2}$$

$\therefore \quad i^{1914}=-1$

Observación: Un número entero es múltiplo de 4 si sus 2 últimas cifras son múltiplos de 4.

Ejemplo 2:

Calcular i^{-8435}

Resolvamos:

Veamos las 2 últimas cifras del número –8435.

Como : $35=\overset{\circ}{4}$

Luego tenemos:

$$i^{-8435}=i^{\overset{\circ}{4}+3}=i^{3}$$

$\therefore \quad i^{-8435}=i$

3. Del cuadro (I) vemos que $\boxed{i+i^2+i^3+i^4=0}$, pero podemos generalizarlo diciendo: la suma de 4 potencias consecutivas cualesquiera de la unidad imaginaria es igual a cero.

Es decir:

$\boxed{i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0}$ $\forall$ n entero

Ejemplo:

- $i^{207}+i^{208}+i^{209}+i^{210}=0$
- $i^{-99}+i^{-100}+i^{-101}+i^{-102}=0$

En síntesis:

- $i^{\overset{\circ}{4}}=1$; $\forall\ \overset{\circ}{4}$ positivo o negativo
- $i^{\overset{\circ}{4}+K}=i^{K}$; $\forall\ \overset{\circ}{4}$ positivo o negativo $K\in Z$
- $i+i^2+i^3+i^4=0$

En general:

- $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$; $\forall\ n\in Z$

Forma binómica (Cartesiana o stándar) de un número complejo

Siendo $Z=(a\,;b)$ un número complejo, su forma binómica viene dado por: $\boxed{Z=a+bi}$

a y $b\in\mathbb{R}$

i : unidad imaginaria

Demostración

Por definición de suma se puede escribir:

$$\begin{aligned} Z=(a;b)&=(a;0)+(0;b)\\ &=a\underbrace{(0;1)}_{(1)}+b\underbrace{(0;1)}_{(i)} \end{aligned}$$

De aquí : $Z=(a\,;b)=a+bi$

Ejemplos:

Siendo:

- $Z=(3\,;4)\in\mathbb{C}\Rightarrow$ su forma binómica es $Z=3+4i$
- $W=\left(\dfrac{-1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\in\mathbb{C}\Rightarrow$ su forma binómica es $W=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
- $M=(0\,;-5)\in\mathbb{C}\Rightarrow$ su forma binómica es $M=0-5i$

Habíamos visto números complejos iguales, opuestos y conjugados (en forma de par ordenado) así como algunas operaciones con números complejos, ahora lo veremos en forma binómica.

Números Complejos Iguales

Siendo: $Z_1=a+bi$ y $Z_2=c+di$

Diremos: $Z_1=Z_2 \Leftrightarrow a=c$ y $b=d$

Donde: $a\,;b\,;c\,;d\in\mathbb{R}$

Números complejos opuestos

Siendo: $Z=a+bi$, su opuesto es $-Z$ ó $\overset{*}{Z}=-a-bi$

Es decir: $(a+bi)$ y $(-a-bi)$ son complejos opuestos

Donde: $a\,;b\in\mathbb{R}$

Números complejos conjugados

Siendo: $Z=a+bi$, su conjugado es $\overline{Z}=a-bi$

Es decir: $(a+bi)$ y $(a-bi)$ son complejos conjugados

Donde: $a\,;b\in\mathbb{R}$

Propiedades

$$\boxed{\frac{Z+\overline{Z}}{2}=\mathrm{Re}(Z)} \quad \boxed{\frac{Z-\overline{Z}}{2i}=\mathrm{Im}(Z)}$$

Ejemplo:

Siendo $Z=-\sqrt{2}+3i$

su opuesto es $-Z=\sqrt{2}-3i$ y su conjugado $\overline{Z}=-\sqrt{2}-3i$

OPERACIONES EN FORMA BINÓMICA

Adición y sustracción de números complejos

Siendo $Z_1=a+bi$ y $Z_2=c+di$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_1+Z_2=(a+c)+(b+d)i \\ Z_1-Z_2=(a-c)+(b-d)i \end{cases}$$

Ejemplo:

Si $Z_1=4+3i$ y $Z_2=-1+i$

$\Rightarrow Z_1+Z_2=3+4i$ y $Z_1-Z_2=5+2i$

Multiplicación de números complejos

Para multiplicar números complejos en forma binómica, procédase como si fueran binomios cualesquiera.

Siendo $Z_1=a+bi$ y $Z_2=c+di$

$$\Rightarrow Z_1.Z_2=(a+bi)(c+di)$$

$$Z_1.Z_2=ac+\underbrace{adi+bci}+bdi^2$$

$$Z_1.Z_2=ac+(ad+bc)i-bd$$

$$\boxed{Z_1.Z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i}$$

Ejemplo:

Si $Z_1=3-2i$ y $Z_2=-1+4i$

$\Rightarrow Z_1.Z_2=5+14i$

División de números complejos

Para dividir dos números complejos en forma binómica exprésese el dividendo y divisor en forma de quebrado y multiplíquese ambos por el conjugado del divisor.

Siendo $Z_1=a+bi$ y $Z_2=c+di$ / $Z_2\neq(0\,;0)$

$$\Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(a+bi)}{(c+di)}\times\frac{(c-di)}{(c-di)}=\frac{ac-\overline{adi+bci}-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_2}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i}$$

Ejemplo:

Si $Z_1=2-3i$ y $Z_2=-3+5i$

$$\Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2}=-\frac{21}{34}-\frac{1}{34}i$$

Potenciación de números complejos

Para potenciar números complejos se debe tener en cuenta el desarrollo del Binomio de Newton, pero es recomendable aplicarlo para exponentes pequeños. En otros casos se puede recurrir a la fórmula de Moivre (se verá más adelante). Además téngase presente algo que puede ayudar bastante en la potenciación, lo siguiente:

$$\boxed{(1\pm i)^2=\pm 2i} \quad \boxed{(1\pm i)^4=-4}$$

Sus demostraciones son simples, ¡Hágalo!

Ejemplo:

Siendo $Z=1+i$, calcular Z^8 (Ex. UNI)

Observación: $Z^8=[(1+i)^4]^2=(-4)^2$

$\therefore\ Z^8=16$

Radicación de números complejos

La radicación de un número complejo arrojará tantas raíces como lo indique el índice del signo radical.

Es decir: dado $Z=a+bi$ para calcular las raíces enésimas o raíces de orden "n" de Z ($n\in\mathbb{N}, n\geq 2$), se establece lo siguiente:

$$\sqrt[n]{a+bi}=x+yi$$

Donde, a, b y n son datos, x e y tendrán que calcularse (x, $y\in\mathbb{R}$); para esto se tendrá que elevar ambos miembros a la "n" y desarrollar el 2° miembro por fórmula del Binomio de Newton. Se recomienda esto cuando "n" toma valores pequeños, en caso contrario téngase en cuenta la fórmula de Moivre (se verá más adelante).

> *Nota :*
> *Cuando el índice es 2 (n=2) podría tomarse en cuenta la transformación de radicales dobles en simples, para algunos casos.*

Ejemplo:

Calcular las raíces cuadradas de $21-20i$

Resolviendo:

Establecemos que : $\sqrt{21-20i}=x+yi$

Elevamos al cuadrado

$21-20i=(x^2-y^2)+2xyi$

Por igualdad de complejos

- $x^2-y^2=21$ (I)
- $2xy=-20$ (II)

$(I)^2+(II)^2$:

$$\frac{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=(21)^2+(-20)^2}{(x^2+y^2)^2\ =\ 841}$$

$\Rightarrow\ x^2+y^2=29$ (III)

(I)+(III): $2x^2=50 \Rightarrow x^2=25$

De aquí: $x=5$ ó $x=-5$

(III)−(I): $2y^2=8$ $y^2=4$

De aquí: $y=2$ ó $y=-2$

De (II): x e y tienen signos opuestos

$\Rightarrow\ x=5,\ y=-2$ ó $x=-5,\ y=2$

$\therefore\ \sqrt{21-20i}=\pm(5-2i)$

Otra forma

Aplíquese transformación de radicales dobles en simples.

Así:

$$\sqrt{21-20i}=\sqrt{21-2\times 10\sqrt{-1}}=\sqrt{21-2\sqrt{-100}}$$

$$21=(25)+(-4) \qquad -100=(25)(-4)$$

$$\Rightarrow \sqrt{21-20i} \begin{cases} \sqrt{25}-\sqrt{-4}=5-\sqrt{4(-1)}=5-2i \\ \sqrt{-4}-\sqrt{25}=\sqrt{4(-1)}-5=2i-5 \end{cases}$$

Propiedades para la conjugación en $\mathbb{C}$

Siendo Z, Z_1 y Z_2 números complejos, se tiene:

1. $\overline{Z_1\pm Z_2}=\overline{Z_1}\pm\overline{Z_2}$
2. $\overline{Z_1.Z_2}=\overline{Z_1}.\overline{Z_2}$
3. $\overline{\overline{Z}}=Z$
4. $(\overline{Z})^n=\left(\overline{Z^n}\right)$
5. $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)}=\dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$; $Z_2\neq(0;0)$

Demostración de (1)

Sean $Z_1=a+bi$ y $Z_2=c+di$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \overline{Z_1+Z_2}&=\overline{(a+bi)+(c+di)}\\
\overline{Z_1+Z_2}&=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\
\overline{Z_1+Z_2}&=(a+c)-(b+d)i\\
\overline{Z_1+Z_2}&=a+c-bi-di\\
\overline{Z_1+Z_2}&=\underbrace{a-bi}_{\overline{Z_1}}+\underbrace{c-di}_{\overline{Z_2}}\\
\therefore\ \overline{Z_1+Z_2}&=\overline{Z_1}+\overline{Z_2}
\end{aligned}$$

> *Nota :*
> *Joven amigo, no se olvide de demostrar las demás propiedades.*

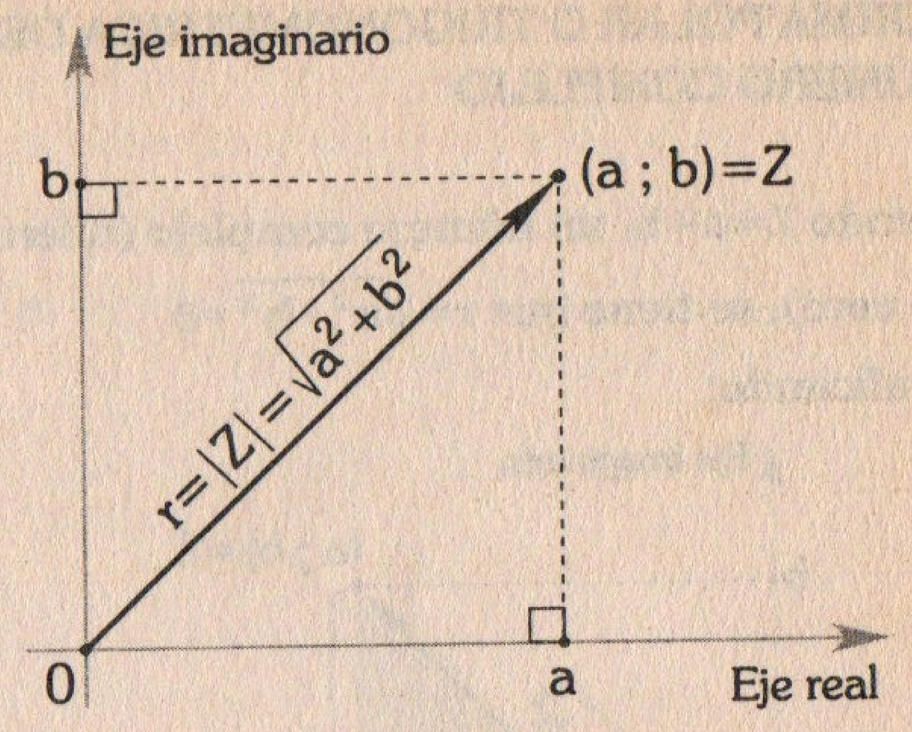
Módulo de un número complejo

El módulo de un número complejo $Z=a+bi$ es un número real no negativo, denotado por $|Z|$ ó r y viene dado por:

$$\boxed{|Z|=r=\sqrt{a^2+b^2}}$$

Geométricamente, el módulo del número complejo $Z=a+bi$ es la longitud del segmento orientado que representa a Z.

Es decir: dado $Z=a+bi$ con $a>0$ y $b>0$, el módulo de Z se expresa en la gráfica:



Ejemplo:

Siendo: $Z=-3-4i \Rightarrow r=|Z|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

Propiedades para módulos

1. $|Z|>0 \Leftrightarrow Z\neq(0;0)$
2. $|Z|=0 \Leftrightarrow Z=(0;0)$
3. $|Z|=|-Z|=|\overline{Z}|$
4. $|Z|^2=Z.\overline{Z}$
5. $|Z_1.Z_2|=|Z_1||Z_2|$
6. $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right|=\dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$; $Z_2\neq(0;0)$
7. $|Z^n|=|Z|^n$
8. $|\sqrt[n]{Z}|=\sqrt[n]{|Z|}$
9. $Re(Z)\leq|Z|$; $Im(Z)\leq|Z|$
10. $|Z_1+Z_2|\leq|Z_1|+|Z_2|$ (Desigualdad triangular)

Demostración de 4.

Siendo $Z=a+bi$

$$\Rightarrow |Z|^2=\sqrt{a^2+b^2}^{\,2}=a^2+b^2=\underbrace{a^2-b^2i^2}_{\substack{\text{Diferencia}\\\text{de cuadrados}}}=\underbrace{(a+bi)}_{Z}\underbrace{(a-bi)}_{\overline{Z}}$$

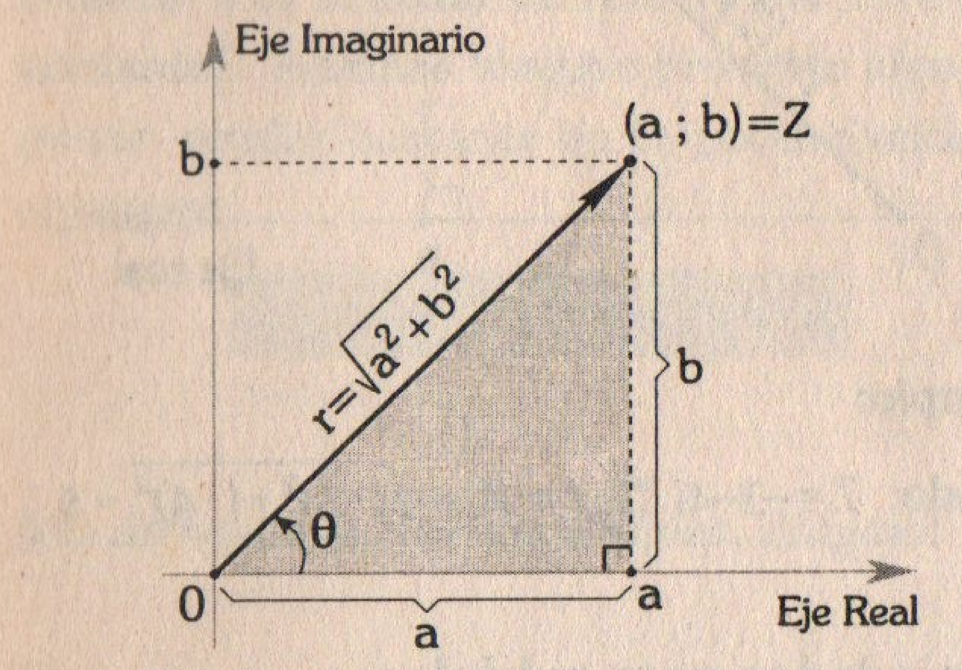
$$\therefore\ |Z|^2=Z.\overline{Z}$$

> *Nota :*
> *Intente demostrar las otras propiedades, ¡atrévase!*

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Siendo $Z=a+bi$ un número complejo (diferente de cero), se tiene que $r=\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$

Graficando:



Llamamos θ al ángulo formado por la flecha que representa a Z, con el eje real en sentido antihorario.

Del triángulo rectángulo, se tiene por trigonometría:

- $a = r\cos\theta$
- $b = r\operatorname{sen}\theta$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a}$

Lo reemplazamos en $Z=a+bi$ y queda así:

$$Z = r\cos\theta + (r\operatorname{sen}\theta)i$$

De aquí se tiene la forma polar o trigonométrica que viene dado por:

$$\boxed{Z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)}$$

Donde:

- $r=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow$ módulo de Z
- El ángulo θ se llama argumento de Z y se denota así: $\operatorname{Arg}(Z)=\theta$, siendo $\theta=\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

Otras Representaciones

- $Z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)=r\operatorname{cis}\theta$ (Representación abreviada)
- $Z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)=r\underline{|\theta}$ (Representación fasorial)

Ejemplo:

$\sqrt{2}(\cos 25°+i\operatorname{sen}25°)=\sqrt{2}\operatorname{cis}25°=\sqrt{2}\underline{|25°}$

¿Cómo calcular el ángulo θ?

Dado $Z=a+bi$, se puede determinar en que cuadrante se encuentra el argumento θ de Z de acuerdo a los signos de a y b , así:

- Si a y b son $(+_S)$ $\Rightarrow \theta\in IC$
- Si a es (–) y b es (+) $\Rightarrow \theta\in IIC$
- Si a es (–) y b es (–) $\Rightarrow \theta\in IIIC$
- Si a es (+) y b es (–) $\Rightarrow \theta\in IVC$

Si θ∈IIC $\Rightarrow \theta=180°-\alpha$	Si θ∈IC $\Rightarrow \theta=\alpha$
Si θ∈IIIC $\Rightarrow \theta=180°+\alpha$	Si θ∈IVC $\Rightarrow \theta=360°-\alpha$

Donde: $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{b}{a}\right|$, de aquí calcula α y luego calcula "θ" teniendo en cuenta el gráfico.

Ejemplos explicativos:

1. Expresar en su forma polar el complejo $Z=3+\sqrt{3}i$

   Resolvamos:

   Cálculo del argumento

   Observación : $a=3$ y $b=\sqrt{3} \Rightarrow \theta\in IC \Rightarrow \theta=\alpha$

   Además: $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha=30° \Rightarrow \theta=30°$

   Cálculo del módulo

   $r=|Z|=\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} \Rightarrow r=2\sqrt{3}$

   ∴ su forma polar es: $Z = 2\sqrt{3}(\cos 30°+i\operatorname{sen}30°)$

2. Mostrar en su forma trigonométrica $Z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

   Resolvamos:

   Cálculo del Arg(Z)=θ

   Observamos: $a=-\sqrt{2}$ y $b=-\sqrt{2} \Rightarrow \theta\in IIIC \Rightarrow \theta=180°+\alpha$

   Además: $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right|=1 \Rightarrow \alpha=45° \Rightarrow \theta=225°$

   Cálculo de |Z|=r

   $r=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2} \Rightarrow r=2$

   ∴ su forma trigonométrica es: $Z=2(\cos 225°+i\operatorname{sen}225°)$

> ***Nota :***
> *Cuando una de las partes real o imaginaria son nulas la transformación a forma trigonométrica es más directa. Para esto recuérdese ángulos notables.*

Ejemplo:

Llevar a forma polar: $Z=-2i$

Observamos: se puede escribir $Z=2(-i)=2(0-i)=2[0+(-1)i]$

$$\therefore \quad Z=2(\cos 270°+i\operatorname{sen}270°)$$

> ***Nota :***
> *Si graficamos el complejo no hay necesidad de utilizar la tabla de reducción de ángulos.*

OPERACIONES EN FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA

Adición y sustracción

Para estas dos operaciones considérese lo siguiente:

- Si los complejos a operar presentan ángulos notables, transfórmese a forma binómica y realícese la operación.
- Si los complejos a operar no presentan ángulos notables tómese en cuenta ciertas transformaciones trigonométricas.

Ejemplo:

Dado los complejos $Z_1=\cos 40°+i\,\text{sen}40°$ y $Z_2=\cos 20°+i\,\text{sen}20°$, exprese Z_1+Z_2 en forma polar e indique $|Z_1+Z_2|$ y $\text{Arg}(Z_1+Z_2)$ y su argumento.

Resolvamos: podemos ver que los ángulos no son notables

$\Rightarrow Z_1+Z_2=(\cos 40°+\cos 20°)+i(\text{sen}40°+\text{sen}20°)$

Recordemos por trigonometría:

- $\text{sen}x+\text{sen}y=2\,\text{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\cos x+\cos y=2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

Ahora apliquemos en (Z_1+Z_2): $(Z_1+Z_2)=2\cos 30°\cos 10°+i(2\,\text{sen}30°\cos 10°)$

De aquí: $Z_1+Z_2=2\cos 10°(\cos 30°+i\,\text{sen}30°)$ forma polar

Además: $|Z_1+Z_2|=2\cos 10°$ y $\text{Arg}(Z_1+Z_2)=30°$

Multiplicación

Siendo: $Z_1=r_1(\cos\theta_1+i\,\text{sen}\theta_1)$

$Z_2=r_2(\cos\theta_2+i\,\text{sen}\theta_2)$

Se tiene: $Z_1.Z_2=(r_1.r_2)[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$

Literalmente: la multiplicación de 2 números complejos en forma polar, dá otro número complejo (producto), cuyo módulo se obtiene multiplicando los módulos de los complejos dados y su argumento sumando los argumentos de los mismos.

Demostración

Si: $Z_1=r_1(\cos\theta_1+i\,\text{sen}\theta_1)$ y $Z_2=r_2(\cos\theta_2+i\,\text{sen}\theta_2)$ (Datos)

$\Rightarrow Z_1.Z_2=[r_1(\cos\theta_1+i\,\text{sen}\theta_1)][r_2(\cos\theta_2+i\,\text{sen}\theta_2)]$

Efectuamos ordenadamente:

$Z_1.Z_2=(r_1.r_2)(\underline{\cos\theta_1\cos\theta_2}+\underline{\underline{i\cos\theta_1\text{sen}\theta_2+i\,\text{sen}\theta_1\cos\theta_2}}+\underline{i^2\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2})$

Agrupando lo señalado:

$$Z_1.Z_2=(r_1.r_2)[\underbrace{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)}+i\underbrace{(\text{sen}\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\text{sen}\theta_2)}_{\text{sen}(\theta_1+\theta_2)}]$$

$\therefore Z_1.Z_2=(r_1.r_2)[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$

Nota :
Esta propiedad se hace extensiva para más de dos números complejos (pueden ser 3, 4, 5, ..., n complejos).

Ejemplos explicativos:

1. Siendo $Z_1=5cis10°$ y $Z_2=4cis2°$

$\Rightarrow Z_1.Z_2=(5\times 4)cis(10°+2°)$ $\therefore$ $Z_1.Z_2=20cis12°$

2. Si $Z_1=\sqrt{2}(\cos 20°+i\,\text{sen}20°)$, $Z_2=(\cos 5°+i\,\text{sen}5°)$

$Z_3=2\sqrt{2}(\cos(-7°)+i\,\text{sen}(-7°))$, $Z_4=4(\cos 30°+i\cos 60°)$

Hállese $Z=Z_1.Z_2.Z_3.Z_4$

Resolvamos: observo que Z_4 no está en forma polar, tendríamos que transformarlo:

$$Z_4=4(\cos 30°+\underline{\underline{i\cos 60°}})<>\underbrace{4(\cos 30°+i\,\text{sen}30°)}_{\text{Forma polar}}$$

Para calcular Z se requiere hallar su módulo y su argumento,

Donde:

- $|Z|=|Z_1||Z_2||Z_3||Z_4|=(\sqrt{2})(1)(2\sqrt{2})(4)\Rightarrow |Z|=16$
- $\text{Arg}(Z)=\text{Arg}(Z_1)+\text{Arg}(Z_2)+\text{Arg}(Z_3)+\text{Arg}(Z_4)$

$=(20°)+(5°)+(-7°)+(30°)\Rightarrow \text{Arg}(Z)=48$

$\therefore Z=Z_1.Z_2.Z_3.Z_4=16cis48$

División

Siendo: $Z_1=r_1(\cos\theta_1+\text{sen}\theta_1)$

$Z_2=r_2(\cos\theta_2+i\,\text{sen}\theta_2)$ / $Z_2\neq(0\,;0)$

Se tiene: $\dfrac{Z_1}{Z_2}=\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\,\text{sen}(\theta_1-\theta_2)]$

Literalmente: la división de números complejos en forma polar, da otro número complejo (cociente), cuyo módulo se obtiene dividiendo los módulos de los complejos dados (módulo del dividendo entre el módulo del divisor) y su argumento restando los argumentos de los mismos (en el mismo orden).

Demostración:

Si: $Z_1=r_1(\cos\theta_1+i\,\text{sen}\theta_1)$ y $Z_2=r_2(\cos\theta_2+i\,\text{sen}\theta_2)\neq(0\,;0)$ (Datos)

De Z_1/Z_2 multiplicamos al dividendo y divisor por la conjugada de $(\cos\theta_2+i\,\text{sen}\theta_2)$, así:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\,\text{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\,\text{sen}\theta_2)}\times\frac{(\cos\theta_2-i\,\text{sen}\theta_2)}{(\cos\theta_2-i\,\text{sen}\theta_2)}$$

Efectuamos ordenadamente:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\left[\frac{(\overline{\cos\theta_1\cos\theta_2}-\overline{\overline{i\cos\theta_1\text{sen}\theta_2+i\,\text{sen}\theta_1\cos\theta_2}}-\overline{i^2\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2}}{\cos^2\theta_2-i^2\text{sen}^2\theta_2}\right]$$

Agrupamos lo indicado:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\left[\frac{\overbrace{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2)}^{\cos(\theta_1-\theta_2)}\quad\overbrace{i(\text{sen}\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\text{sen}\theta_2)}^{\text{sen}(\theta_1-\theta_2)}}{\underbrace{\text{sen}^2\theta_2+\cos^2\theta_2}_{1}}\right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\,\text{sen}(\theta_1-\theta_2)]$$

Ejemplo:

Siendo $Z_1=8cis36°$ y $Z_2=4cis16°$

$$\Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2}=\left(\frac{8}{4}\right)cis(36°-16°) \qquad \therefore \frac{Z_1}{Z_2}=2cis20°$$

Potenciación

Siendo $Z=r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta)$ y "n" un número entero positivo, se cumple:

$$\boxed{Z^n=r^n(\cos n\theta+i\,\mathrm{sen}\,n\theta)}$$

Fórmula de Moivre

Literalmente: la potenciación de un número complejo elevado al exponente entero y positivo, da otro número complejo, cuyo módulo es igual al módulo del complejo dado elevado a dicho exponente y su argumento es el producto del exponente por el argumento del mismo.

Demostración

Si: $Z=r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta)$ y $n\in Z^+$ (Datos)

$\Rightarrow Z^n=[r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta)^n]$

Por definición de exponente natural, se puede escribir:

$$Z^n=\underbrace{[r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta)][r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta)]...[r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta)]}_{\text{"n" corchetes}}$$

Observación: El 2° miembro es una multiplicación de "n" complejos en forma polar (aplíquese la propiedad para multiplicación)

$$\Rightarrow Z^n=\underbrace{(r.r.r...r)}_{\text{"n" veces}}[\cos\underbrace{(\theta+\theta+\theta+...+\theta)}_{\text{"n" veces}}+i\,\mathrm{sen}\underbrace{(\theta+\theta+\theta+...+\theta)}_{\text{"n" veces}}]$$

$$\therefore Z^n=r^n(\cos n\theta+i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$$

> ***Nota :***
> *Está fórmula se puede extender para todo "n" entero (positivo o negativo), es decir, si $Z=r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta)$ y (–n) es un entero negativo, se cumple: $Z^{-n}=r^{-n}(\cos n\theta-i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$*

Ejemplos:

1. Calcular $Z=(-1+\sqrt{3}i)^7$

Resolviendo: potenciar aplicando el desarrollo del Binomio de Newton podría resultar laborioso y más aún si el exponente fuera mucho mayor. Calcularemos aplicando la fórmula de Moivre. Transformando a forma trigonométrica: $-1+\sqrt{3}i$, para ello calculamos su módulo (r) y su argumento (θ).

Observo de $(-1+\sqrt{3}i)$ $\Rightarrow$ $a=-1$, $b=\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\theta\in IIC$ $\Rightarrow$ $\theta=180°-\alpha$

Radicación:

Además: $tg\alpha=\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|=\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\alpha=60°$ $\Rightarrow$ $\theta=120°$

Siendo Z= r(cosθ+isenθ) y " un número entero y posi

Cálculo de r: $r=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}$ $\Rightarrow$ $r=2$

Luego, podemos escribir: $Z=[2(\cos120°+i\,\mathrm{sen}120°)]^7$

las raíces enésimas de Z ó raíces de orden "m" viene dado por:

Aplicando Moivre:

$Z=2^7[\cos840°+i\,\mathrm{sen}840°)$

$$\Rightarrow Z=2^7[\cos(\cancel{720°}+120°)+i\,\mathrm{sen}(\cancel{720°}+120°)]$$

Descontamos número entero de vueltas y se tiene:

$$Z=128(\cos120°+i\,\mathrm{sen}120°)=128\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\sqrt[m]{Z}=\sqrt[m]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{m}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\right.\right.$$

$$\therefore Z=-64+64\sqrt{3}i$$

Donde K= 0, 1, 2, 3, ...

2. Si:

→ las raíces enésimas o raíces de orden "m" de un número complejo viene dado por otro número complejo

* $Z=\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta$ $\Rightarrow$ $Z^{-1}=\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\theta$
* $Z=\cos5°+i\,\mathrm{sen}5°$ $\Rightarrow$ $Z^{-10}=\cos50°-i\,\mathrm{sen}50°$

Radicación

Siendo $Z=r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta)$ y "n" un número entero y positivo, las raíces enésimas de Z ó raíces de orden "n" viene dado por:

Z_1, Z_2, Z_3, Z_4

$$\sqrt[n]{Z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \qquad \textbf{Fórmula de Moivre}$$

Donde: $k=0, 1, 2, 3, ..., (n-1)$

Literalmente: las raíces enésimas o raíces de orden "n" de un número complejo, viene dado por otro número complejo, cuyo módulo es igual a la raíz enésima del módulo del complejo dado y su argumento igual al argumento del mismo pero aumentado en un número entero de vueltas (2kπ) y todo dividido entre el índice del signo radical.

> ***Nota :***
> *¿Podría hacer la demostración de la fórmula dada?, yo creo que sí. ¿Qué corresponde hacer?, ¡ inténtelo !*

Ejemplo:

Calcular las raíces de $Z=(-2-2\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$

Resolvemos: transformemos a forma polar: $(-2-2\sqrt{3}i)$; hallemos su módulo (r) y argumento (θ).

De $(-2-2\sqrt{3}i)$: $a=-2$, $b=-2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\theta\in IIIC$ $\Rightarrow$ $\theta=180°+\alpha$

Además: $tg\alpha=\left|\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}\right|=\sqrt{3} \Rightarrow \alpha=60° \Rightarrow \theta=240°$

$\boxed{\text{Raíces enésimas de } +1}$

$\sqrt[n]{1}$

Cálculo de r: $r=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2} \Rightarrow r=4$

• Si "n" es par, dos de sus raíces son reales e iguales a ± 1 y las otras $(n-2)$ raíces son números complejos conjugados por pares.

• Si "n" es impar, tiene un único valor real y positivo igual a $+1$ y las otras $(n-1)$ raíces son números complejos conjugados por pares.

Luego: $Z=[4(\cos 240°+i\,sen 240°)]^{\frac{1}{4}}$

Aplicando Moivre:

$$Z=4^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{240°+2k\pi}{4}\right)+i\,sen\left(\frac{240°+2k\pi}{4}\right)\right]$$

Donde: k=0, 1, 2, 3

De aquí, calculamos las raíces dando valores a "k":

- $k=0 \Rightarrow Z_1=\sqrt[4]{4}(\cos 48°+i\,sen 48°)=\sqrt{2}\,cis\,48°$
- $k=1 \Rightarrow Z_2=\sqrt[4]{4}(\cos 120°+i\,sen 120°)=\sqrt{2}\,cis\,120°$
- $k=2 \Rightarrow Z_3=\sqrt[4]{4}(\cos 192°+i\,sen 192°)=\sqrt{2}\,cis\,192°$
- $k=3 \Rightarrow Z_4=\sqrt[4]{4}(\cos 264°+i\,sen 264°)=\sqrt{2}\,cis\,264°$

$$\boxed{\sqrt[n]{1}=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\,sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Donde $k=0,1,2,\ldots,(n-1)$

RAÍCES ENÉSIMAS DE LA UNIDAD POSITIVA O NEGATIVA

I. RAÍCES ENÉSIMAS DE +1

Las raíces enésimas de +1 (o simplemente de la unidad) denotado por $\sqrt[n]{1}$, verifica lo siguiente:

a) Si "n" es par, dos de sus raíces son reales e iguales a ± 1 y las otras $(n-2)$ raíces son números complejos conjugados por pares.

b) Si "n" es impar, tiene un único valor real y positivo igual a +1 y las otras $(n-1)$ raíces son números complejos conjugados por pares.

Fórmula para calcular las raíces enésimas de +1

Dígame, ¿se puede escribir: $\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{1(1+0i)}$?...

Ese paréntesis lo escribimos así: $\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{1(\cos 0°+i\,sen 0°)}$ ¿correcto? ...

Ahora aplicamos la fórmula de Moivre: $\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{1}\left[\cos\left(\dfrac{0°+2k\pi}{n}\right)+i\,sen\left(\dfrac{0°+2k\pi}{n}\right)\right]$

Donde: k=0, 1, 2, 3, ... , (n–1)

$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\omega^2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Simplificándola se tiene:

$$\boxed{\sqrt[n]{1}=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\,sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Donde: k=0, 1, 2, ... , (n-1)

Interpretación Geométrica de las raíces enésimas de +1

Si ubicamos en el plano de Gauss las raíces enésimas de la unidad, éstos "n" puntos (raíces) estarán sobre una circunferencia de radio unitario tal que al unirlos consecutivamente serán los vértices de un polígono regular de "n" lados inscrito a dicha circunferencia, donde:

a) Si "n" es impar, uno de los vértices se ubicará sobre el eje real a la derecha de cero.

b) Si "n" es par, dos de sus vértices se ubicarán sobre el eje real y equidistarán de cero.

Aplicación: cuando n=3 , se tiene:

$\boxed{\omega=(\overline{\omega^2})}$ $\omega^2=\overline{\omega}$

Raíces cúbicas de la unidad

De la fórmula anteriormente dada, hallemos las raíces cúbicas de 1

Observación: $\sqrt[3]{1}=\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)+i\,sen\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)$

$\boxed{\text{Raíces enésimas de } -1}$ $\sqrt[n]{-1}$

Donde: k=0, 1, 2

De aquí, tenemos:

- Si $k=0 \Rightarrow \sqrt[3]{1}=\cos 0°+i\,sen 0°=1$
- Si $k=1 \Rightarrow \sqrt[3]{1}=\cos 120°+i\,sen 120°=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
- Si $k=2 \Rightarrow \sqrt[3]{1}=\cos 240°+i\,sen 240°=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

• Si "n" es par, no tiene raíz real. Las "n" raíces son números complejos conjugados por pares.

• Si "n" es impar, tiene un único valor real y negativo igual a -1 y las otras $(n-1)$ raíces son números complejos conjugados por pares.

En síntesis:

$$\sqrt[3]{1}=\begin{cases}1 & \leftarrow \text{Valor real}\\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i & \\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i & \end{cases}\quad \text{Complejos conjugados}$$

De aquí: si a una de las raíces complejas conjugadas (cualesquiera de las dos) le llamamos ω, se demuestra (elevándola al cuadrado) que la otra ω^2. Estableciéndose lo siguiente:

$\sqrt[n]{-1}=\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{n}+i\,sen\dfrac{(2k+1)\pi}{n}$

$$\sqrt[3]{1} \rightarrow \begin{cases}1 & =1\\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i & =\omega\\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i & =\omega^2\end{cases}$$

Luego diremos que las raíces cúbicas de 1 son: 1, ω y ω^2

Donde $K=0,1,2,\ldots$

Donde:

$\boxed{\omega=\overline{\omega^2}}$ $\boxed{\omega^2=\overline{\omega}}$

Deducción de algunas propiedades

1. Sabemos que las raíces cúbicas de la unidad ($\sqrt[3]{1}$) son 1, ω y ω², es evidente que cualesquiera de ellas elevada al cubo es igual a 1.

➪ Si ω es una raíz cúbica de 1 (cualesquiera de las dos complejas conjugadas): $\omega^3=1$, de aquí si elevamos ambos miembros a la "k" (k es un número entero), se tiene:

$\omega^{3k}=1^k$ ➪ $\omega^{3k}=1$, pero 3k es $\overset{\circ}{3}$ (múltiplo de 3)

Podemos decir: cualesquiera de las raíces cúbicas de la unidad elevada a exponentes divisibles por 3 ó múltiplos de 3 es igual a 1; es decir: $\boxed{\omega^{\overset{\circ}{3}}=1}$ ∀ $\overset{\circ}{3}$ positivo o negativo

> **Nota :**
> *Recuerde que 3k, es $\overset{\circ}{3}$, ∀k∈Z*

$\boxed{\omega^{3k}=\omega^k}$ $k\in Z$

Ejemplos:

Calcular ω^{312} ; ω^{-300}

- $\omega^{312}=\omega^{3(104)}=\omega^{3}=1$ ➪ $\omega^{312}=1$
- $\omega^{-300}=\omega^{3(-100)}=\omega^{3^\circ}=1$ ➪ $\omega^{-300}=1$

2. Naturalmente que ω (raíz cúbica de 1) no siempre estará elevado exactamente a un $\overset{\circ}{3}$ (positivo o negativo), podría presentarse $\omega^{\overset{\circ}{3}\cdot k}$ (k es un número entero).

$\boxed{\omega^{\overset{\circ}{3}}=1}$

Veamos: $\omega^{\overset{\circ}{3}+k}=\omega^{\overset{\circ}{3}}.\omega^k=1.\omega^k=\omega^k$

Concluimos así: $\boxed{\omega^{\overset{\circ}{3}+k}=\omega^{k}}$ ∀ $\overset{\circ}{3}$ positivo o negativo y k entero

Téngase en cuenta lo siguiente:

$\omega^3=1$ ➪ $\omega.\omega^2=1$, de aquí despejando se tiene:

$\boxed{\omega^{-1}=\omega^2}$ $\boxed{\omega^{-2}=\omega}$

$\omega.\omega^2=1$ $\overline{\omega}=\omega^2$ $\omega^2=\overline{\omega}$

Ejemplo:

1. Calcular ω^{6542}

Resolvamos:

Dividimos 6542 entre 3

$$\begin{array}{r|l} 6542 & 3 \\ \cline{2-2} 5 & 2180 \\ 24 & \\ 2 & \end{array}$$

➪ $6542=\underbrace{3(2180)}_{\overset{\circ}{3}}+2$

$6542=\overset{\circ}{3}+2$

Luego tenemos:

$\omega^{6542}=\omega^{\overset{\circ}{3}+2}=\omega^2$

$\therefore \omega^{6542}=\omega^2$

2. Calcular ω^{-7253}

Resolvamos:

Dividimos 7253 entre 3

$$\begin{array}{r|l} 7253 & 3 \\ \cline{2-2} 12 & 2180 \\ 5 & \\ 23 & \\ 2 & \end{array}$$

➪ $7253=3(2417)+2$

$-7253=\underbrace{3(-2417)}_{\overset{\circ}{3}}+(-2)$

$-7253=\overset{\circ}{3}+(-2)$

Luego tenemos:

$\omega^{-7253}=\omega^{\overset{\circ}{3}+(-2)}=\omega^{-2}$

$\therefore \omega^{-7253}=\omega$

$\boxed{1+\omega+\omega^2=0}$

3. La suma de las raíces cúbicas de 1 es igual a cero.

Es decir:

$\boxed{1+\omega+\omega^2=0}$

4. Si ω es una de las raíces cúbicas de 1 (ω≠1), la suma de 3 potencias consecutivas de ω es igual a cero.

Es decir: $\boxed{\omega^{n}+\omega^{n+1}+\omega^{n+2}=0}$ ∀ n entero

$\boxed{\omega^{n}+\omega^{n+1}+\omega^{n+2}=0}$; ∀ n ∈ Z   ω ≠ 1

Ejemplo:

Calcular $S=\omega^{20}+\omega^{21}+\omega^{22}+\omega^{23}+\omega^{24}$

Observación: podemos hacer un quita y pon ($\pm\omega^{25}$)

➪ $S=\underbrace{\omega^{20}+\omega^{21}+\omega^{22}}_{0}+\underbrace{\omega^{23}+\omega^{24}+\omega^{25}}_{0}-\omega^{26}$

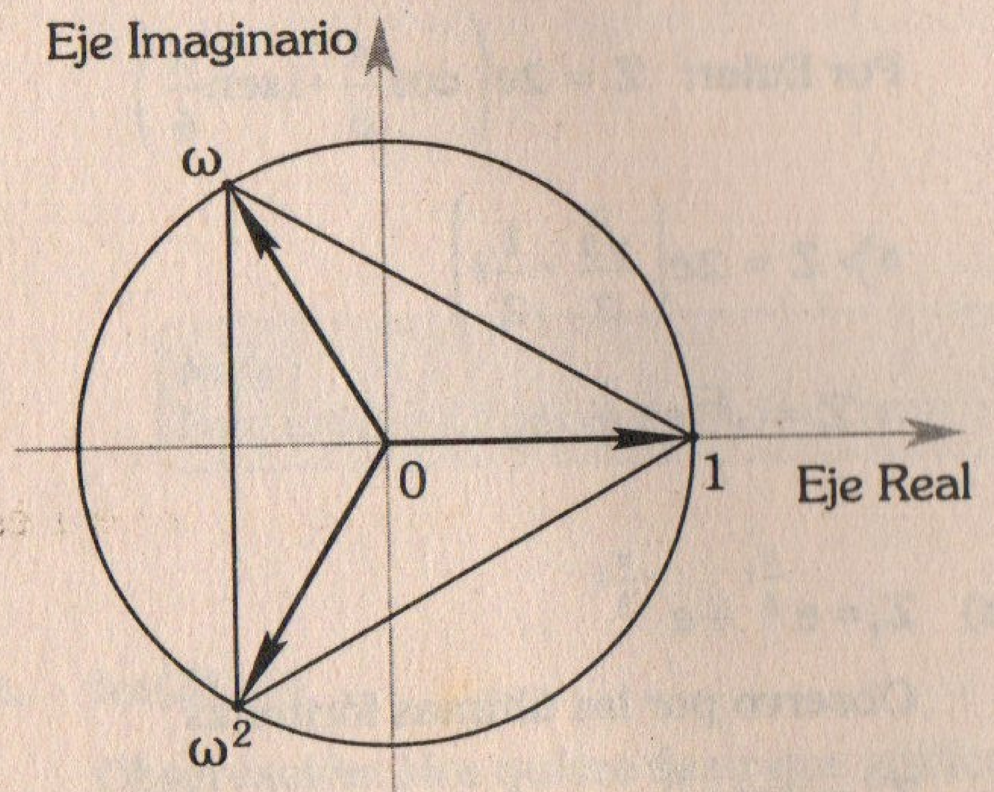
$S=-\omega^{25}=-\omega^{24+1}=-\omega^{\overset{\circ}{3}+1}$ $\therefore$ $S=-\omega$

En síntesis:

1. $\omega^{\overset{\circ}{3}}=1$; ∀ $\overset{\circ}{3}$ positivo o negativo
2. $\omega^{\overset{\circ}{3}+k}=\omega^{k}$; ∀ $\overset{\circ}{3}$ positivo o negativo k∈Z
3. $1+\omega+\omega^2=0$
4. $\omega^{n}+\omega^{n+1}+\omega^{n+2}=0$; ∀ n∈Z ω ≠ 1

Interpretación y representación geométrica de $\sqrt[3]{1}$

Si ubicamos las raíces cúbicas de la unidad: 1, ω y ω² en el plano de Gauss, éstos 3 puntos (raíces) estarán sobre una circunferencia de radio unitario tal que al unirlos serán los vértices de un triángulo equilátero inscrito a dicha circunferencia. Así:



> **Nota :**
> *Conocido lo anterior, calcule Ud. las raíces cuartas de 1 y represéntelo gráficamente. ¡Ud. puede!*

II. RAÍCES ENÉSIMAS DE –1

Las raíces enésimas de –1, denotado por $\sqrt[n]{-1}$, verifica lo siguiente:

a) Si "n" es par, no tiene raíz real. Las "n" raíces son números complejos conjugados por pares.

b) Si "n" es impar, tiene un único valor real y negativo igual a –1 y las otras (n–1) raíces son números complejos conjugados por pares.

Fórmula para calcular las raíces enésimas de –1

¿Recuerda lo que hicimos para calcular las raíces enésimas de +1? ... ➪ hagamos algo similar.

$\sqrt[n]{-1}=\sqrt[n]{1(-1+0i)}$ ¿es válido esto? ...

El paréntesis lo expresamos así:

$\sqrt[n]{-1}=\sqrt[n]{1(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi)}$ ¿está bien? ...

Apliquemos la fórmula de Moivre:

$$\sqrt[n]{-1}=\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Donde: k = 0, 1, 2, ... (n–1)

Simplificando tenemos:

$$\boxed{\sqrt[n]{-1}=\cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi}$$

Donde: k=0, 1, 2, ..., (n-1)

Ejemplo explicativo:

Calcúlese las raíces cuartas de –1

Resolvamos: por la fórmula anterior, se tiene:

$$\sqrt[4]{-1}=\cos\left(\frac{2k+1}{4}\right)\pi+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k+1}{4}\right)\pi$$

Donde: k=0, 1, 2, 3

De aquí tenemos:

- k=0 ➪ $\sqrt[4]{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$
- k=1 ➪ $\sqrt[4]{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$
- k=2 ➪ $\sqrt[4]{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$
- k=2 ➪ $\sqrt[4]{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

Complejos conjugados por pares

FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Siendo $Z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$ un número complejo en su forma polar o trigonométrica, la formula de Euler: $e^{\theta i}=(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$

multiplicando por "r"

$$r\,e^{\theta i}=\underbrace{r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)}_{Z}$$

su forma exponencial viene dado por:

$$\boxed{Z=re^{i\theta}}$$

Donde:

* $r=|Z|$ ➭ Módulo de Z
* e ➭ Base de los logaritmos neperianos (e=2,718281...)
* i ➭ Unidad imaginaria
* $\theta=\operatorname{Arg}(Z)$ ➭ Argumento de Z, expresado en radianes

Ejemplos:

a) Dado el número complejo $Z=3(\cos 10°+i\operatorname{sen}10°)$

Observamos:

* $r=|Z|=3$, * $\operatorname{Arg}(Z)=\theta=10°=\frac{\pi}{18}$

$\therefore$ Su forma exponencial es: $Z=3e^{i\frac{\pi}{18}}$

b) Exprese en forma exponencial $Z=-3+3i$

Resolvamos:

Se observa $\theta\in IIC$ ➭ $\theta=\pi-\alpha$, pero

$tg\alpha=\left|\frac{3}{-3}\right|=1$ ➭ $\alpha=\frac{\pi}{4}$

Luego: $\theta=\frac{3\pi}{4}$; además: $r=\sqrt{(-3)^2+3^2}$

➭ $r=3\sqrt{2}$

$\therefore$ La forma exponencial de Z es: $3\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$

Fórmulas de Euler

Sabemos que: $Z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)=re^{i\theta}$, válido $\forall$ θ en radianes. De donde observamos:

$$\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}$$

Como está fórmula es válido $\forall$ θ, entonces reemplazamos θ por $(-\theta)$:

$$e^{i(-\theta)}=\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta)$$

Teniendo en cuenta criterios de trigonometría, concluimos:

$$\boxed{e^{-i\theta}=\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta}$$

De estas dos fórmulas sumándolas o restándolas ordenadamente obtenemos lo siguiente:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}\quad\boxed{\operatorname{sen}\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

Fórmulas que podrían ser muy útiles para el estudio de las funciones trigonométricas.

Ejemplos:

Expresar en forma binómica:

$Z=2e^{1+\frac{\pi}{6}i}$ Observo se puede escribir:

$$Z=2e.e^{\frac{\pi}{6}i}$$

Por Euler: $Z=2e\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

➭ $Z=2e\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$\therefore$ $Z=\sqrt{3}e+ei$

(a) $Z_1=e^{\frac{\pi}{3}i}+e^{-\frac{\pi}{3}i}$

Observo por las últimas fórmulas

$$Z_1=2\cos\frac{\pi}{3}$$

$$Z_1=2\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

$\therefore$ $Z_1=1+0i$

•Formulas de Euler: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$
$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta$.

Interpretación y representación gráfica de números complejos regidas por determinadas relaciones

$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\operatorname{sen}\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

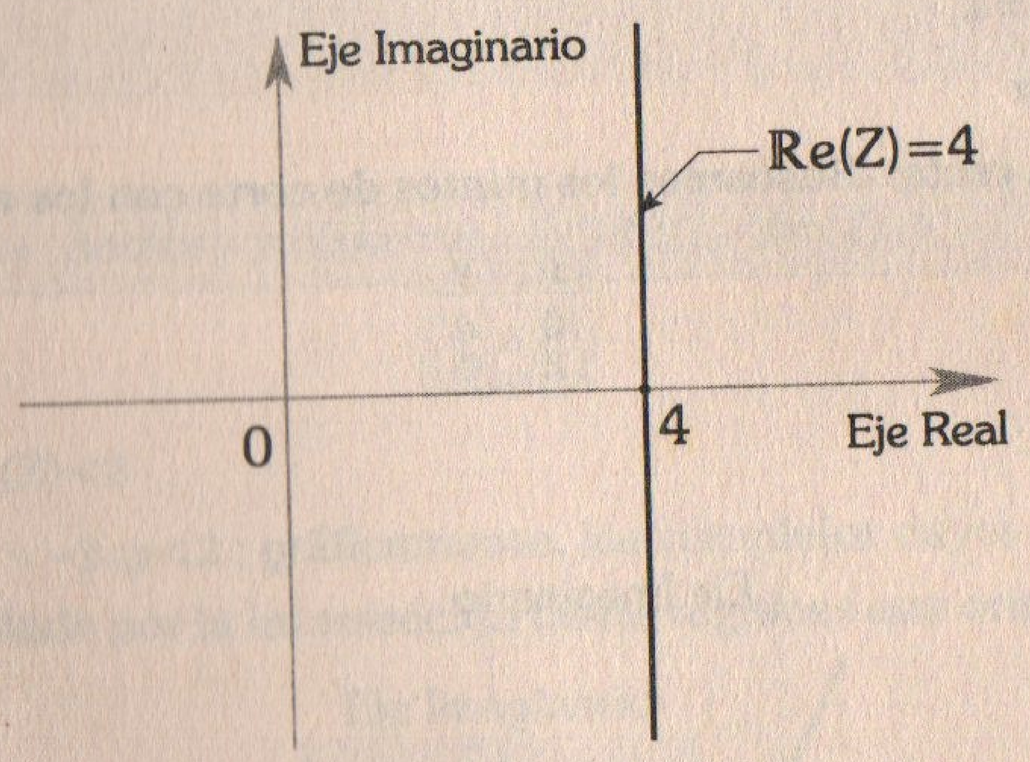
Interpretar un número complejo es analizado teniendo en cuenta sus componentes (parte real e imaginaria) y graficarlo es dibujar todo el conjunto de afijos cuyas componentes satisfagan la relación o relaciones dadas. Para esta parte debe recordarse las ecuaciones y gráficas de figuras conocidas, como la recta, circunferencia, parábola, elipse, etc.

Ejemplos Ilustrativos

Determinar analítica y gráficamente los números complejos $Z=(x\,;y)$, que cumplan lo siguiente:

1. $\operatorname{Re}(Z)=4$

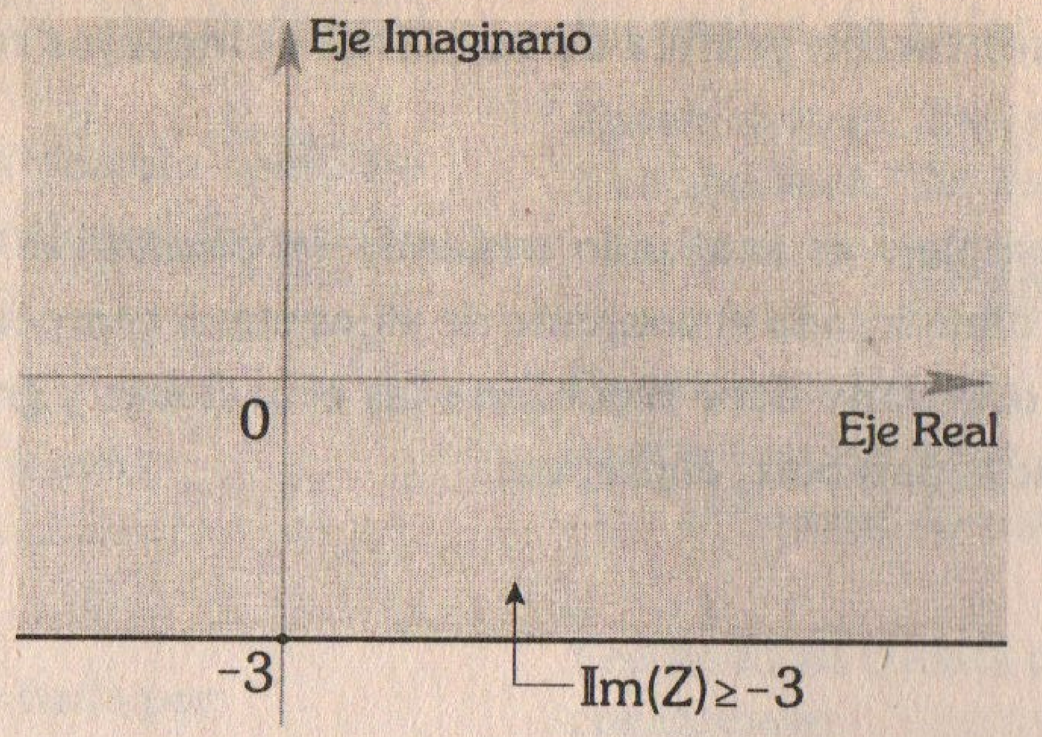
Observación: Nos quiere decir que gráficamente todos los complejos Z que tengan como parte real siempre a 4, no interesando el valor que tome su parte imaginaria. Es decir: $x=4$ e y toma cualquier valor real; por tanto veremos que al dibujar todos los puntos $(4\,;y)$ se obtiene como gráfica una recta paralela al eje imaginario, que pasa por el punto de abscisa $x=4$



Nota :
Para usted, ¿qué pasa cuando $\operatorname{Im}(Z)=-3$?, analícelo y grafique. ¡Es sencillo!

2. $\operatorname{Im}(Z)\geq-3$

Observación: Nos quiere decir que gráficamente todos los complejos Z cuya parte imaginaria sea siempre mayor que -3 e inclusive -3, no interesando el valor que tome su parte real. Es decir: $y\geq-3$ y x toma cualquier valor real; por tanto al dibujar todos los puntos $(x\,;y)$ donde $y\geq-3$ y $x\in\mathbb{R}$ se obtiene como gráfica el semiplano por encima de la recta $y=-3$, incluyendo la recta.



Nota : *Analice y grafique cuando $\mathrm{Re}(Z)<7$*

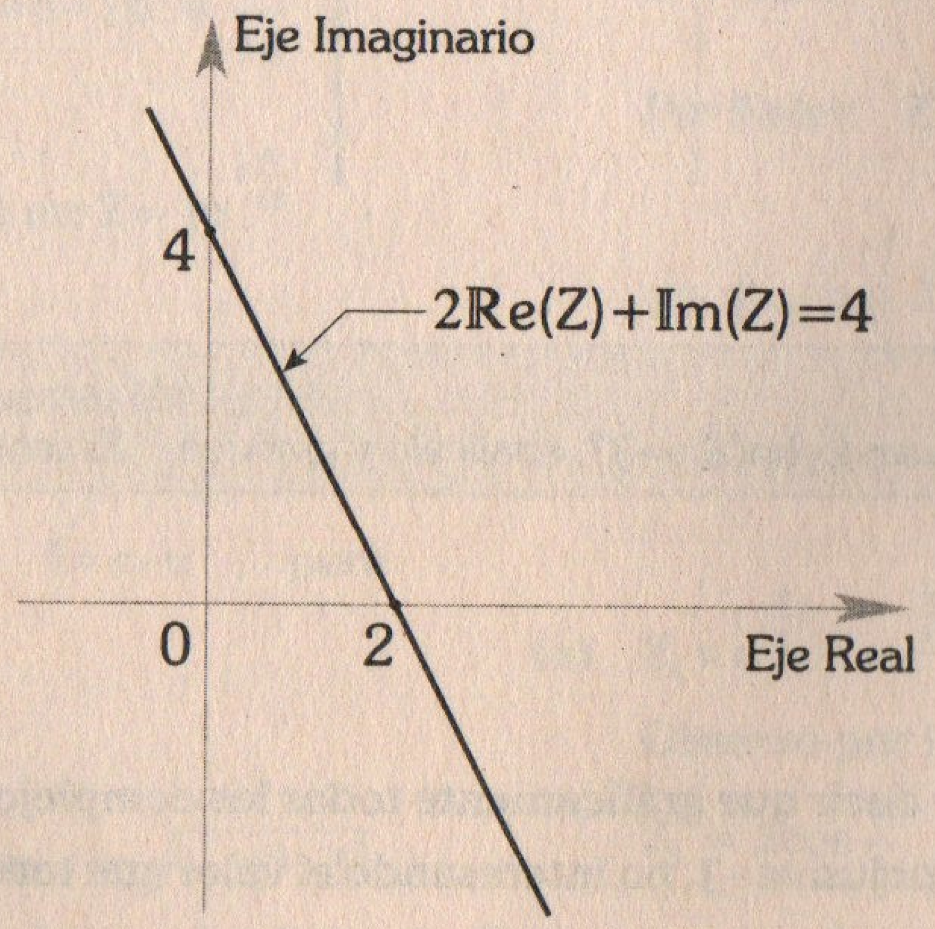
3. $2\mathrm{Re}(Z)+\mathrm{Im}(Z)=4$

Observación: Nos quiere decir que grafiquemos todos los complejos Z que cumplan la condición dada, es decir: $2x+y=4$

Observación: $y=4-2x$

Es la ecuación de una recta. Buscamos los puntos de corte con los ejes, así:

x	y
0	4
2	0



Nota : *¿y cuál es el análisis y gráfica, si $3\mathrm{Re}(Z)-2\mathrm{Im}(Z)=-2$?*

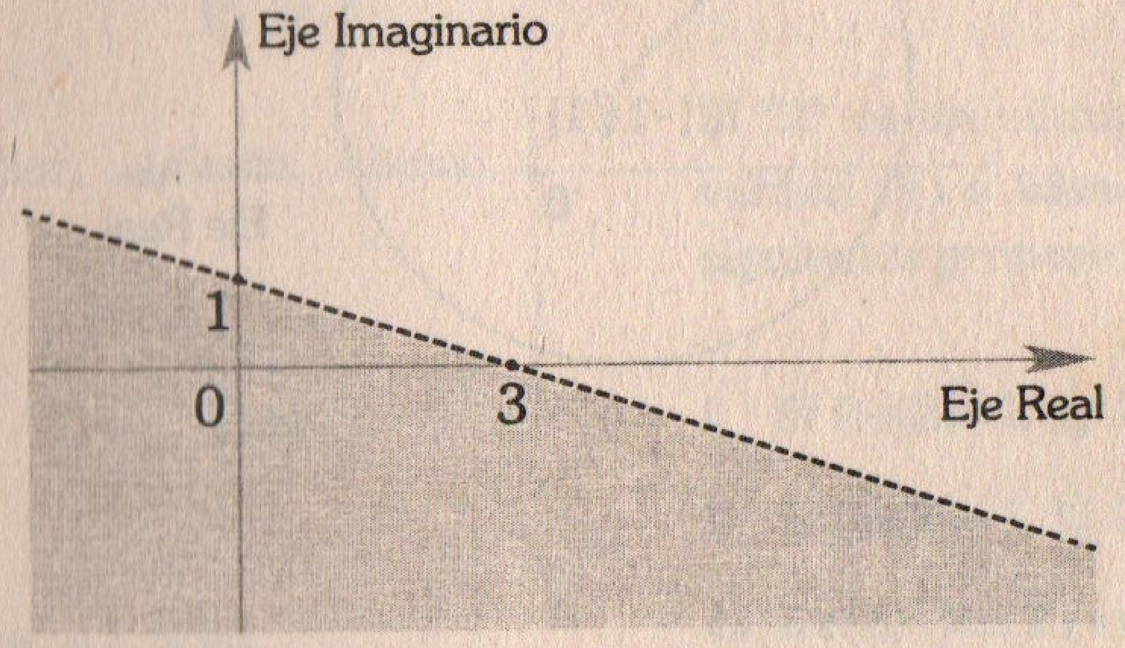
4. $\mathrm{Re}(Z)+3\mathrm{Im}(Z)<3$

Observación: $x+3y<3 \Rightarrow y<\dfrac{3-x}{3}$

Luego de despejar y, la gráfica será el semiplano por debajo de la recta $y=\dfrac{3-x}{3}$

Observación:

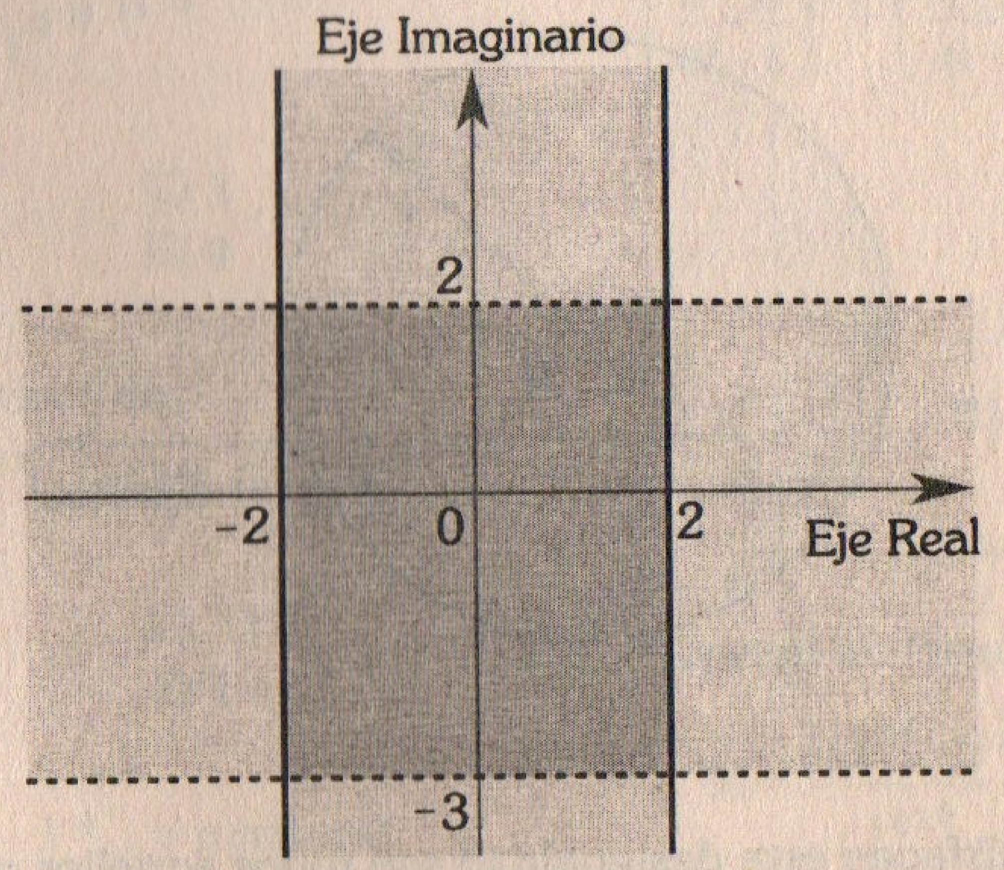
x	y
0	1
3	0



Nota : *Analice y grafique cunado: $3\mathrm{Re}(Z)-2\mathrm{Im}(Z)\leq 1$*

5. $-2\leq\mathrm{Re}(Z)\leq 2 \wedge -3\leq\mathrm{Im}(Z)<2$

Observación: $-2\leq x\leq 2 \wedge -3\leq y<2$ **; gráficamente, los complejos cuyos componentes satisfacen las desigualdades, viene dado por la intersección de las regiones que originan dichas desigualdades.**



Nota : *Ahora, hágalo Ud., cuando $-7<\mathrm{Re}(Z)\leq 12$ y $-15\leq 3\mathrm{Im}(Z)<27$*

6. $|Z+1-i|=2$

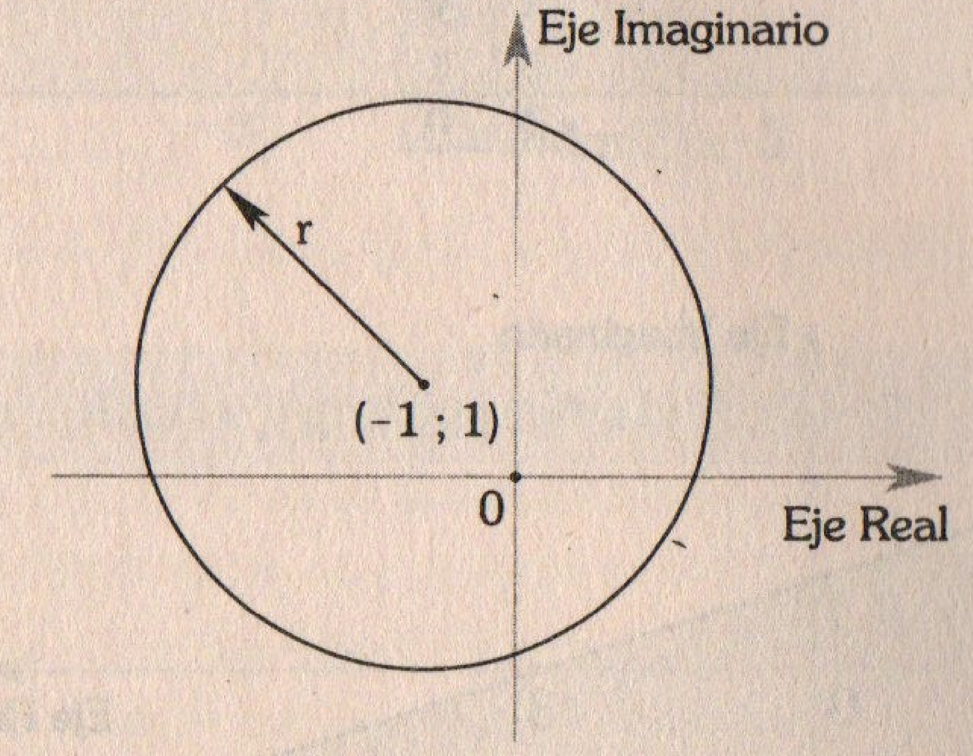
Observación: como $Z=x+yi$

$$\Rightarrow \underbrace{|(x+1)+(y-1)i|}=2$$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=2$$

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2^2$$

Esta es la ecuación de una circunferencia con centro en (–1 ; 1) y radio 2



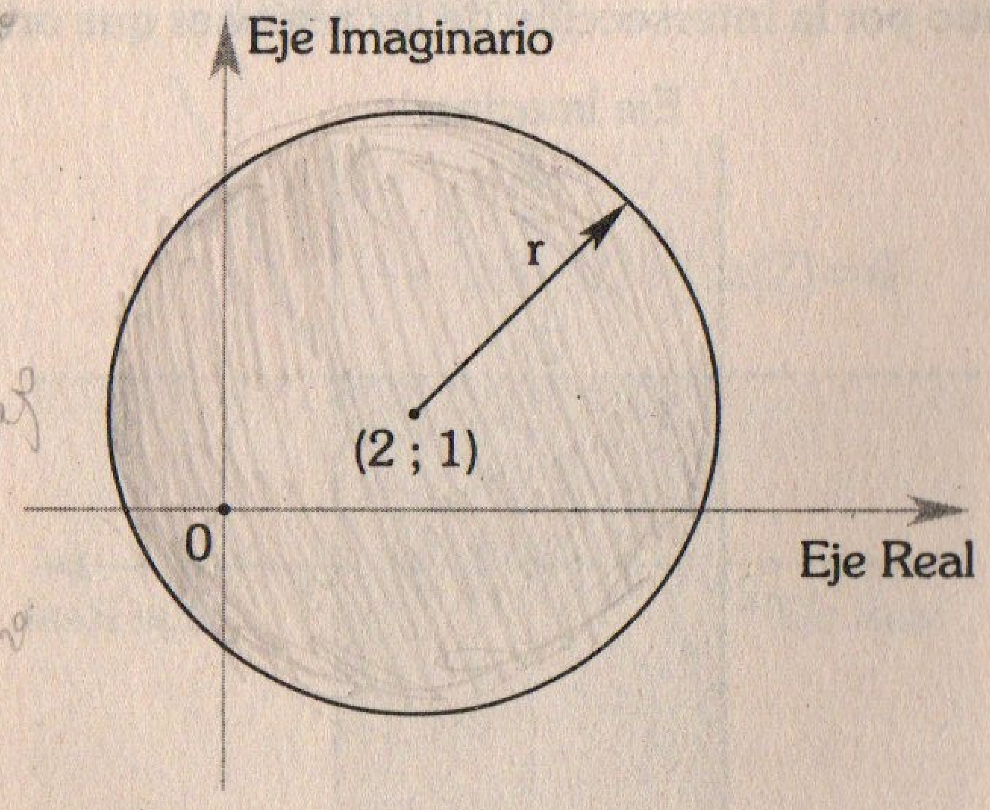
7. $|Z-2-i|\leq 3$

Observación: como $Z=x+yi$

$$\Rightarrow \underbrace{|(x-2)+(y-1)i|}\leq 3$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\leq 3$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2\leq 3^2$$



∴ Los $Z=(x\,;y)$ que satisfacen esta desigualdad son todos aquellos que se hallan dentro de una circunferencia con centro en (2 ; 1) y radio 3, incluyendo el contorno.

Problemas Resueltos

1. **Calcular** i^{13579}

A) i B) –i C) 1
D) –1 E) 2i

2. **¿Y a qué es igual** $i^{1234567890}$ **?**

A) i B) –i C) 1
D) –1 E) 45

3. **Conocido lo anterior, calcule ahora:** $i^{-5555555555}$

A) 1 B) –1 C) i
D) –i E) 2i

4. **Simplifique:**

$$f=\frac{i^{\underline{|2}+\underline{|4}+\underline{|6}+\dots+\underline{|m}}}{i^{\underline{|1}+\underline{|3}+\underline{|5}+\dots+\underline{|n}}}$$

A) 1 B) –1 C) –i
D) i E) $\dfrac{m}{n}$

5. **Señale la potencia de:** $i^{9^{11^{13^{15}}}}$

A) i B) –i C) 1
D) –1 E) 9

6. **Halle los valores respectivos de:**

$(a)=i^{\overline{UNI2000}}$ **y** $(b)=i^{-7^{7^{7^{7}}}}$ **, señale (a)+(b)**

A) 0 B) 2i C) –2i
D) 1–i E) 1+i

7. **Si se define:** $S_n=i^{5^n}+i^{-3^n}$, **∀ n natural**

Calcular : $M=S_1+S_2+S_3+\dots+S_{2000}$

A) 1999i B) 1999n C) 2000n
D) 2000 E) 2000i

8. **Halle el cociente de:**

$$f=\frac{2i^2+4i^2+6i^2+\dots+(2n)i^{2n}}{1i^2+3i^3+5i^5+\dots+(2n-1)i^{2n-1}};$$

"n" es par

A) 1 B) i C) –i
D) ni E) –1

9. **Si "Z" es un número complejo, marque la verdad (V) o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones:**

I. Si $Re(Z)=Z \Rightarrow Z$ es un número real

II. Si $Im(Z)=Z \Rightarrow Z$ es un imaginario puro

III. $Re(Z)-Re(\overline{Z})=0$

IV. $Im(Z)+Im(\overline{Z})=0$

A) VVFF B) VVVV C) VFVV
D) VFFF E) VFFV

10. **Evaluar:**

$$\left(\frac{2+3i}{2i-3}\right)^1+\left(\frac{4+5i}{4i-5}\right)^2+\left(\frac{6+7i}{6i-7}\right)^3+\dots$$

$$\dots+\left(\frac{134+135i}{134i-135}\right)^{67}$$

A) 1 B) –1 C) 67
D) –67i E) –i

11. **Exprese en forma binómica:**

$$M=\frac{i^{1^{2^{3^{4}}}}+i^{2^{3^{4^{5}}}}+i^{3^{4^{5^{6}}}}+i^{4^{5^{6^{7}}}}}{-i^{-3^{4^{5^{6}}}}+2i^{-6^{7^{8^{9}}}}+-3i^{-7^{9^{11^{13}}}}}$$

A) 1+i B) 1–i C) 0–i
D) 0+i E) 2+i

12. Reduzca la fracción continua:

$$f=\cfrac{(1+i)^6}{4i+\cfrac{(1-i)^4}{-i+\cfrac{1-i}{1+\cfrac{1+i}{1-i}}}}\ ,\ \text{si } i=\sqrt{-1}$$

A) $2i$ B) $-2i$ C) 1
D) 4 E) -4

13. Diga, cuáles son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F) de las siguientes afirmaciones:

I. Si $Z=x+yi \Rightarrow \mathrm{Re}(Z^{-1})=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$Z\neq(0,0)$

II. $(1+i)^n=(1-i)^n$, $\forall$ "n" igual a $\overset{\circ}{4}$ (múltiplos de 4)

III. Siendo Z un número complejo

$\Rightarrow \mathrm{Re}(Z)=\mathrm{Im}(iZ)\wedge \mathrm{Im}(Z)+\mathrm{Re}(iZ)=0$

IV. Siendo $Z_1=2+i \wedge Z_2=3(2+i)$

$\Rightarrow Z_1<Z_2$

A) VVVV B) VVVF C) FFVV
D) FVFV E) FVVV

14. Evaluar abreviadamente:

$$H=\frac{(1-i)^{502}+(1+i)^{501}}{(1+i)^{502}+(1-i)^{501}}$$

A) $-i$ B) i C) $1+i$
D) $1+i$ E) 1

15. Sabiendo que:

$$\alpha=\left(\frac{\mathrm{Re}(Z)}{Z}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{Re}(Z)}{\bar{Z}}\right)^2+\frac{2\mathrm{Re}(Z)\mathrm{Im}(Z)i}{(i\bar{Z})^2}\quad \text{y}$$

$$\beta=\left(\frac{\mathrm{Im}(Z)}{Z}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{Im}(Z)}{\bar{Z}}\right)^2+\frac{2\mathrm{Re}(Z)\mathrm{Im}(Z)i}{(iZ^*)^2}$$

Determine el valor de $\alpha-\beta$

A) 0 B) 2 C) -1
D) -2 E) 4

16. Marque verdadero con "V" y falso con "F", según convenga en:

* El conjugado de $\bar{Z}V$ es $Z\bar{V}$
* El número $-4i$ es negativo
* $(1+i)^3+(1-i)^3=-4$
* $i^{-(2n+1)}=-i^{2n+1}$; $n\in\mathbb{Z}$

A) FFVF B) VFVF C) VVVF
D) VFVV E) VVVV

17. Si: $Z_1=(1+i^{-3})^3$, $Z_2=(1+i^{-5})^5$ y $Z_3=(-1+i^{-1})^6$, calcular la parte imaginaria de:
$K=[(Z_3\div Z_1)]^5+Z_2^{\,3}]\div(Z_1.Z_2.Z_3)$

A) 4 B) -3 C) -2
D) -1 E) 0

18. Dado los complejos: $Z_1=a+bi$ y $Z_2=c+di$, ¿qué relación debe cumplir a, b, c y d para que $(Z_1\div Z_2)$ sea un número real?

A) $a+d=b+c$ B) $a.d=b.c$ C) $a.c=b.d$
D) $a-d=c-b$ E) $a.b=c.d$

19. La relación entre a, b, c y d para que el cociente de dividir $Z_1=a+bi$ por $Z_2=c+di$ sea un número imaginario puro es:

A) $a.c+b.d=0$
B) $a.b+c.d=0$
C) $a+b+c+d=0$
D) $a.d+b.c=0$
E) $a+c=b+d$

20. Si se establece que:

$\dfrac{4^a i+16}{2^b-ai+bi}=4i$; donde a y b son números reales, calcule: $(a^{-b}+b^{-a})^{2^{-1}}$

A) 4,2 B) 1,5 C) 4,5
D) $\dfrac{5}{24}$ E) 10

21. Si el opuesto del conjugado del opuesto de $(2+n)+(m-6)i$ es igual al conjugado de $(m+9i)-(5+n)i$, calcule el conjugado del opuesto del conjugado de $(m+ni)(m$ y $n\in\mathbb{R})$.

A) $11+4i$ B) $-11-4i$ C) $-11+4i$
D) $11-4i$ E) $-11-41i$

22. Si $\{a, b, n\}\subset\mathbb{R}$ $i^2=-1$, una condición necesaria entre a y b para que el complejo $a-bi$ se pueda expresar como $\dfrac{2+ni}{2-ni}$, es:

A) $a^2-b^2=1$ B) $a.b=n$ C) $a^2+b^2=1$
D) $a+b=1$ E) $a-b=1$

23. Estableciéndose que: $\dfrac{a+bi}{a-bi}=\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}i$,

entonces se verifica que:

A) $A+B=C$ B) B^2+C^2 C) $A^2+B^2=B^2$
D) $A.B.C=1$ E) $A^2+B^2=C^2$

24. Indique la parte real del cociente de:

$$K=\frac{(1+i)a+(1-i)b}{(1+i)a-(1-i)b}\ ;\ a\neq b$$

A) $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ B) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ C) $-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$
D) $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}$ E) $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

25. ¿Cuántos números $Z\in\mathbb{C}$ verifican la igualdad $-Z^2=\bar{Z}$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

26. a, b, x e y son números reales que relacionados así:
$\sqrt[3]{a+bi}=x+yi$, según esto, calcule el equivalente numérico de:

$$S=\left(\frac{a}{x^3}-1\right)\left(\frac{b}{y^3}+1\right)$$

A) 1 B) -9 C) $\dfrac{1}{2}$
D) $-\dfrac{1}{2}$ E) -2

27. Indicar el cociente de parte real menor que su parte imaginaria que se obtiene al dividir:

$$\frac{\sqrt{12-16i}}{1-i}$$

A) $-2-i$ B) $-3+2i$ C) $-3-2i$
D) $-9-8i$ E) $-3-i$

28. Determine el valor numérico de:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2+3i}{7+2i}\right)+\mathrm{Re}\left(\frac{5-i}{7+2i}\right)$$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 1 C) $\dfrac{3}{4}$
D) 2 E) 0

29. Partiendo de la igualdad:

$$\frac{Z.\bar{Z}+Z+10\bar{Z}+Z^*+41}{10}=-(1+i)^3$$

Evalué $S=|Z+2(5\ ;-2)|$

A) $\sqrt{22}$ B) 29 C) 22
D) $\sqrt{29}$ E) $\sqrt{27}$

30. Indique el módulo de Z, si:

$$Z=\cfrac{i}{1+i+\cfrac{i}{1-i+\cfrac{i}{1+i}}}$$

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\dfrac{\sqrt{7}}{9}$
D) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

31. ¿Cuánto vale el módulo de:

$$K=\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}-\frac{(1-i)^6-1}{(1+i)^6+1}\ ?$$

A) 1,6 B) 1,5 C) 1,4
D) 1,3 E) 1,2

32. ¿Qué valores reales de x e y hacen que los números: $x^2-3(y+20i)$; $-19+3x^2yi$ sean complejos opuestos? Señale el módulo de $(x+yi)$, si $x \in \mathbb{Z}$.

A) 29 B) $\sqrt{26}$ C) 26
D) $\sqrt{29}$ E) $\sqrt{10}$

33. Si: $Z\in\mathbb{C}$ y $Z.\overline{Z}=7\mathrm{Im}(Z)$, calcular $|Z-3 ; 5i|$

A) 3,5 B) 2,2 C) 1,2
D) 3,4 E) 2,4

34. Hallar el módulo de:

$$\frac{(3+5i)^5.\sqrt[7]{1-i}^{\,2}}{(\sqrt{26}-2\sqrt{2}i)^4.(\sqrt[7]{2}+\sqrt[7]{2}i)}$$

A) $\sqrt[7]{2}$ B) $\sqrt{17}$ C) $\sqrt{14}$
D) $\sqrt{29}$ E) $\sqrt{2\sqrt[7]{4}}$

35. ¿Cuál es el número complejo de componentes enteras y positivas y de módulo máximo que multiplicado por el conjugado del cuadrado de $(-2-i)$ da como resultado un número real? Las componentes son de un dígito. Indique su módulo.

A) 5 B) 10 C) 20
D) 25 E) 50

36. Señale el módulo del complejo "Z" que verifica la igualdad mostrada:

$$2Z(\overline{-Z-1}) = 5/Z\notin\mathbb{R}$$

A) $2\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{10}$ C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
D) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ E) $\sqrt{10}$

37. La diferencia de dos números complejos es $10-10i$. Si la parte imaginaria del minuendo es -8 y el cociente de dividir es un número real, calcule la suma de los módulos de las inversas de dichos números.

A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{16}$ B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{12}$ C) $\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$
D) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ E) $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

38. Siendo Z_1 y $Z_2 \in \mathbb{C}/|Z_1|=|Z_2|=\sqrt{5}$; hallar el valor de:

$$M=\frac{|Z_1+Z_2|^2-10}{\mathrm{Re}(Z_1.\overline{Z_2})}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

39. Efectuando en: $P=|1+Z\omega|^2-|Z\omega|^2$, se obtiene:

A) $2\mathrm{Re}(Z\omega)$ B) $\mathrm{Re}(Z\omega)+1$
C) 1
D) $2\mathrm{Re}(Z\omega)+1$ E) $2\mathrm{Re}(Z\omega)-1$

40. Determine el valor de: $\left|Z-\dfrac{2}{3}i\right|$, si $Z=\dfrac{i-a}{1+3ai}$; donde "a" es un número real.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 2 C) $\dfrac{1}{5}$
D) 1 E) $\dfrac{1}{3}$

41. Calcúlese el número complejo $\overline{Z}$ de componentes enteras, y que satisfagan las igualdades:

$$\left|\frac{Z-2}{Z-6i}\right|=\frac{\sqrt{205}}{41} \text{ y } \left|\frac{Z-2}{Z-6}\right|=1$$

A) $3-i$ B) $2-i$ C) $1-4i$
D) $4-i$ E) $1-3i$

42. ¿Cuál es la parte imaginaria del número complejo que debe restarse a: $Z=(1-\sqrt{2}i)^4$ para que la diferencia sea un complejo de módulo igual a 2 y cuyo argumento sea 315°?

A) $3\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $-5\sqrt{2}$
D) $-\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

43. Reduzca:

$$G=\left[\frac{(\sqrt[3]{2}i)^7+4\sqrt[3]{2}i^{10}}{i^{11}+i^{15}}\right]^3$$

Dar su respuesta en forma polar.

A) $16cis\dfrac{4\pi}{3}$ B) $32\sqrt{2}cis\dfrac{\pi}{4}$
C) $32\sqrt{2}cis\dfrac{5\pi}{4}$
D) $32cis\dfrac{4\pi}{3}$ E) $16cis\dfrac{5\pi}{4}$

44. Si se verifica que:

$$\frac{(\sqrt[3]{10}\mathrm{cis}31^\circ)^3(\sqrt[5]{6}\mathrm{cis}12^\circ)^5}{(\sqrt[11]{2}\mathrm{cis}3^\circ)^{11}(\sqrt[15]{15}\mathrm{cis}2^\circ)^{15}} <> (1+i)^n,$$

señale el valor para "n".

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

45. Hallar el argumento del complejo Z, si:

$$Z=\frac{(4+3i)^3(-1+i)^4}{(-\sqrt{3}-i)^3}$$

A) 200° B) 189° C) 239°
D) 231° E) 250°

46. Calcular la potencia: $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{39}}{(1-i)^{40}}$

A) 2^{15} B) 2 C) 2^{39}
D) 2^{20} E) -2^{19}

47. Simplificando:

$$f=\frac{(1+\sqrt{3}i)[\sqrt[5]{8}(\cos 8^\circ - i\,\mathrm{sen}8^\circ)]^5}{2[\sqrt{2}(\mathrm{sen}55^\circ+i\cos 55^\circ)]^2(-\cos 50^\circ+i\,\mathrm{sen}50^\circ)}$$

A) 1 B) -4 C) 2
D) -2 E) $\dfrac{1}{2}$

48. Escriba el número complejo de argumento igual a 300° tal que al multiplicarlo por el opuesto de su conjugado se obtenga -24

A) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}i$ B) $3\sqrt{2}-\sqrt{6}i$ C) $-3\sqrt{2}i+\sqrt{6}$
D) $\sqrt{6}i-3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}-\sqrt{6}i$

49. Si Z es un número complejo de argumento "α" que verifica la igualdad:

$$\left(\frac{Z}{\overline{Z}}\right)^3+\left(\frac{\overline{Z}}{Z}\right)^3=-2,$$

Calcular un valor de: $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha$

A) $\sqrt{3}$ B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

50. $Z\in\mathbb{C}$, donde $|Z|=5$ y $|Z-5|=2\sqrt{5}$, halle el V.N. de $(Z-4+3i)^{16}$, si se sabe que $\mathrm{Arg}(Z)\in\left\langle\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right\rangle$

A) 16 B) 81 C) 64
D) 1024 E) 256

51. Indique la parte imaginaria del complejo por el cual debe multiplicarse a $(1-\sqrt{3}i)^5$ para que nos de un resultado igual a $4cis\dfrac{2\pi}{3}$

A) $\sqrt{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$
D) $\dfrac{\sqrt{3}}{16}$ E) $\dfrac{1}{2}$

52. Si 30° es el argumento del complejo $Z=(1-a)\sqrt{\sqrt{3}+i}+a(\sqrt{3}+i)$, escribirlo en su forma exponencial $a\in\mathbb{R}$

A) $\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$ B) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$ C) $2e^{\frac{\pi}{3}i}$
D) $e^{\frac{\pi}{3}i}$ E) $4e^{\frac{\pi}{3}i}$

53. Siendo Z un complejo de argumento θ y módulo igual a 1, verificando que: $Z^6+\overline{Z}^{\,6}=-1$, con $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$; calcule $\theta_{máx}$

A) $\frac{\pi}{9}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{2\pi}{5}$
D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{2\pi}{9}$

54. Dados:

$Z_1=\sqrt{3}cis7\alpha$ y $Z_2=\sqrt{3}cis3\alpha$ / $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$,

indique verdadero o falso según corresponda en:

I. $|Z_1+Z_2|=2\sqrt{3}\cos5\alpha$
II. $Arg(Z_1+Z_2)=2\alpha$
III. $Arg(Z_2\div Z_1)=2\pi-4\alpha$

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FFF E) FVF

55. ¿Cuál es el mayor número entero y positivo de 4 cifras, menor que 3000, que hace que se verifique:

$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$?

A) 2999 B) 2998 C) 2990
D) 2994 E) 2992

56. Del complejo:

$Z=1-\cos2\theta+i\text{sen}2\theta$; $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

No es verdad que: (marque verdadero o falso)

* $|Z|=2\text{sen}\theta$

** $Arg(Z)=\frac{\pi}{2}-\theta$

*** $Z^2=4\text{sen}^2\theta cis(\pi-2\theta)$

A) VVV B) VFV C) FVF
D) VVF E) FFF

57. El complejo cociente (en forma polar) de:

$\frac{1+\cos\theta+i\text{sen}\theta}{1-\cos\theta+i\text{sen}\theta}$; $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, es:

A) $tg\frac{\theta}{2}cis\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ B) $tg\frac{\theta}{2}cis(\pi-\theta)$

C) $ctg\frac{\theta}{2}cis(\theta-\frac{\pi}{2})$

D) $ctg\frac{\theta}{2}cis(\pi-\frac{\theta}{2})$ E) $ctg\frac{\theta}{2}cis(\theta+\frac{\pi}{2})$

58. Se tiene un complejo Z de componentes positivas y cuyo módulo es igual a 8, si se sabe que al multiplicarla por un imaginario puro Z_1 se obtiene otro número complejo de argumento igual a 300° y módulo igual a 40, calcúlese el valor de: $\mathbb{R}e(Z)+\mathbb{I}m(Z)+\mathbb{I}m(Z_1)$

A) $9+4\sqrt{3}$ B) $-1+4\sqrt{3}$ C) $7+4\sqrt{3}$
D) $-2+\sqrt{3}$ E) $-1+3\sqrt{3}$

59. Halle el valor de $[\mathbb{R}e(\alpha)]^2+[\mathbb{I}m(\alpha)]^2$, si "α" es una de las raíces cuadradas de $Z=-5-12i$

A) 16 B) 9 C) 25
D) 4 E) 13

60. Calcule una de las raíces quintas de:

$$Z=\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$$

A) $\frac{\sqrt[10]{512}}{2}cis201°$ B) $\frac{\sqrt[10]{512}}{2}cis101°$

C) $\sqrt[10]{512}cis101°$

D) $\sqrt[10]{512}cis201°$ E) $\sqrt[5]{2}cis201°$

61. Calcular ω^{24680} ; ω es raíz cúbica de 1 $(\omega\neq1)$

A) 1 B) ω C) ω^2
D) -1 E) -ω

62. ¿Y a qué es igual $\omega^{1234543210}$?

A) -ω B) -1 C) ω^2
D) ω E) 1

63. Siendo "ω" una raíz cúbica de la unidad, diferente de uno, calculese la potencia:

$\omega^{7^{8^{9^{10}}}}$

A) ω B) ω^2 C) 1
D) -1 E) -ω

64. Halle los valores respectivos de:

(a) $\omega^{-\overline{LUIS99}}$ y (b) $\omega^{-5^{5^{5^{5}}}}$, sabiendo que L, U, I, S son cifras pares positivas y diferentes. Señale (a)×(b)

A) 1 B) ω C) ω^2
D) -1 E) -ω

65. Siendo "ω" una de las raíces complejas conjugadas de las raíces cúbicas de 1, marque verdadero (V) o falso (F) según convenga en:

* $\overline{1+\omega^{-1}}=1+\omega$

* $|1+\omega|=|\omega|$

* $|1+\omega|^2+|1-\omega|^2=4$

* $\overline{\omega^2}=\omega^{-1}$

A) FFFF B) FFVF C) VVVV
D) VFVF E) FFVV

66. Determine el módulo, luego de reducir:

$$K=\frac{\omega^{2^{2^{2^{2}}}}+\omega^{3^{3^{3^{3}}}}+\omega^{4^{4^{4^{4}}}}+\omega^{5^{5^{5^{5}}}}}{\omega^{7^{8^{9^{10}}}}+\omega^{8^{9^{10^{11}}}}+\omega^{9^{10^{11^{12}}}}+\omega^{10^{11^{12^{13}}}}}$$

"ω" es raíz cúbica de 1, pero diferente de 1.

A) 1 B) 0,2 C) 0,5
D) 0,1 E) 0,4

67. Simplifique:

$$L=\frac{\frac{\omega}{\omega-1}+\frac{1}{\omega+1}}{\frac{\omega}{\omega-1}-\frac{1}{\omega+1}}+\frac{2}{1-\frac{\omega(\omega+1)}{\omega-1}}$$

Siendo 1, ω y ω^2 raíces cúbicas de uno.

A) -1 B) 1 C) 2
D) $-\frac{1}{2}$ E) ω

68. Reduzca: $f=\omega^7+\cfrac{1+\omega^5}{1+\cfrac{1+\overline{\omega^2}}{1+\cfrac{1+\omega^2}{1+\cfrac{1+\omega}{1+\overline{\omega}}}}}$

si "ω" es una raíz cúbica de 1, pero no 1.

A) -ω B) ω^2 C) ω
D) 1 E) -1

69. Reducir:

$K=\frac{\omega^{-2}(\overline{\omega^2}-1)^2}{-\overline{\omega-1}}+\frac{3(\overline{\omega^2}+1)}{(\overline{\omega}+\omega)(\overline{1-\omega})}$; $\sqrt[3]{1}=\omega$ $(\omega\neq1)$

A) 0 B) 1 C) 2
D) ω E) ω^2

70. Simplifique: $\left[\ldots\left(\left[\left(\omega^{\omega^{-1}}\right)^{i^2}\right]^{\omega^{-3}}\right)^{i^4}\ldots\right]^{\omega^{-53}}$

A) 1 B) ω C) ω^2
D) -ω E) $\sqrt[i]{\omega}$

71. ¿Qué valor o valores puede tomar el módulo de E, si: $E=\frac{(1+\omega)^{202}+(1+\omega^2)^{201}}{(1+\omega^2)^{202}-(1+\omega)^{201}}$;

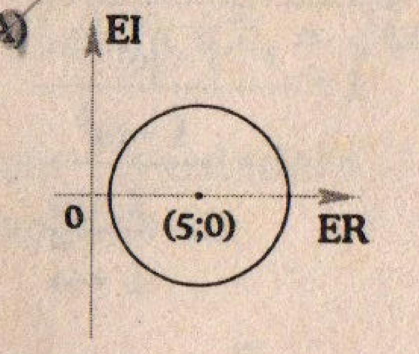
"ω" es conocido pero diferente de 1?

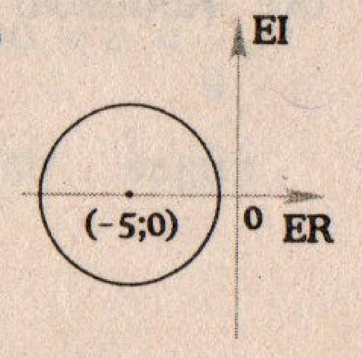
A) sólo 0 B) 1 ; $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$
D) 2 ; $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$ es su único valor

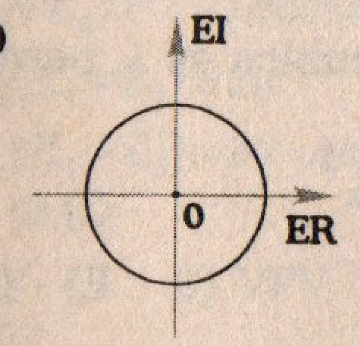
72. El valor numérico de $L=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, para $a=5$, $b=3\omega+2\omega^2$, $c=2\omega+3\omega^2$, siendo 1, ω y ω^2 las raíces cúbicas de la unidad es:

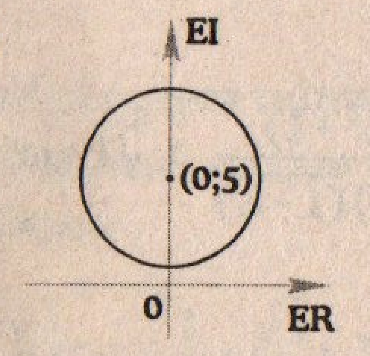
A) -18 B) 625 C) 169
D) 400 E) 324

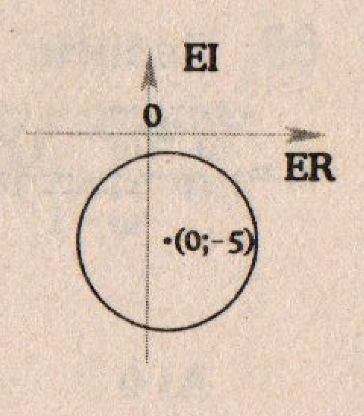
73. Graficar en el plano complejo la región que representa a todos los complejos Z que verifica: $|Z-5|=4$

A)


B)


C)


D)


E)


74. Siendo 1, ω, ω^2 raíces cúbicas de 1, calcule su valor de:
$(\omega^{26}+\omega^{24}+\omega^{22}+...+\omega^2+1)(1-\omega^7+\omega^{14}-\omega^{21}+...+\omega^{238})$

A) 1 B) -1 C) ω
D) ω^2 E) $-\omega$

75. Conociendo que:
$x=m+n$, $y=m\omega+n\omega^2$, $z=m\omega^2+n\omega$, calcúlese el argumento de $M=x^3+y^3+z^3$, si: $m=cis10°$ y $n=cis20°$ y "ω" es una raíz cúbica de 1 ($\omega \neq 1$).

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$
D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

76. Simplifique:
$S=1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^4+...$ (2001sumandos)
si "ω"es raíz cúbica de 1 pero diferente de 1.

A) $\frac{2000}{\omega-1}$ B) $\frac{2000}{\omega-1}$ C) $\frac{2000}{1-\omega}$
D) $\frac{-2001}{\omega-1}$ E) $\frac{-2000}{\omega-1}$

77. Calcule el área de la región que genera todos los complejos Z que satisfacen la desigualdad: $3 \le |Z-1+i| \le 6$

A) $9\pi\mu^2$ B) $27\pi\mu^2$ C) $36\pi\mu^2$
D) $207\mu^2$ E) $3\pi\mu^2$

78. Hallar la ecuación del lugar geométrico definido por $Arg(Z+3)=\frac{\pi}{4}$, si $Z = x+yi$

A) $y=x-3$ B) $x=y+3$ C) $x=y-1$
D) $y=x+3$ E) $y=x+1$

79. Siendo $Z=x+yi$, el lugar geométrico definido por $Arg\left(\frac{Z-1}{Z-i}\right)=\frac{\pi}{4}$ es una circunferencia, cuyo centro es:

A) (2 ;2) B) (2 ; 1) C) (-1 ; 1)
D) (1 ; -1) E) (1 ; 1)

80. Siendo $Z = (x\,;y)$ un número complejo y $Z^{-1}=\left(\frac{1}{2x}\,;-y\right)$ su recíproco, calcular el área de la región definida por los afijos de Z al unirlos consecutivamente.

A) $6\mu^2$ B) $2\sqrt{2}\mu^2$ C) $8\mu^2$
D) $4\mu^2$ E) $2\mu^2$

Resoluciones

1. Dividimos 13579 entre 4

$$\begin{array}{r|l} 13579 & 4 \\ \cline{2-2} 15 & 3394 \\ 37 & \\ 19 & \\ 3 & \end{array} \Rightarrow \quad 13579=\underbrace{4(3394)}_{\overset{\circ}{4}}+3 = 13579=\overset{\circ}{4}+3$$

Luego: $i^{13579} = i^{\overset{\circ}{4}+3}$

$\therefore\ i^{13579} = i^{3} = -i$

2. Llamemos al exponente de i: N $\Rightarrow$ N = 1234567890

Podríamos dividirlo entre 4, pero ... ¿y si el número tuviera más cifras?

Recordemos algo para estos casos, y más aún en general:

Todo número es divisible por 4 ó múltiplo de 4 si el número formado por las dos últimas cifras de dicho número es divisible por 4.

Observación:

N=......90 , pero 90 no es divisible por 4, entonces "N" no es múltiplo de 4, pero ... se puede escribir así:

$N=\underbrace{1234567888}_{\overset{\circ}{4}}+2$ ¿si o no? $\Rightarrow$ $N=\overset{\circ}{4}+2$

Luego se tiene: $i^{N}=i^{\overset{\circ}{4}+2}$ $\quad\therefore\ i^{N}=i^{2}=-1$

3. Sea:

$M=-5555555555$

$\Rightarrow$ Se puede escribir: $M=\underbrace{-5555555556}_{\overset{\circ}{4}}+1 \Rightarrow M=\overset{\circ}{4}+1$ ..... (1)

o también podría escribirse "M" así: $M=\underbrace{-5555555552}_{\overset{\circ}{4}}-3 \Rightarrow M=\overset{\circ}{4}-3$ ..... (2)

Podría considerar cualesquiera de las dos formas; considerando (1) se tiene : $i^{M}=i^{\overset{\circ}{4}+1}$ $\quad\therefore\ i^{M}=i$

4. Analizando los exponentes de i:

$$(*)\quad \lfloor\!\underline{2} + \lfloor\!\underline{4} + \lfloor\!\underline{6} + \ldots + \lfloor\!\underline{m} \Rightarrow$$ Podemos observar que a partir de $\lfloor\!\underline{4}$ cada uno de los sumandos (factoriales) son divisibles por $4(\overset{\circ}{4})$; cada factorial contiene por lo menos un 4.

$$\Rightarrow \lfloor\!\underline{2} + \underset{\overset{\circ}{4}}{\lfloor\!\underline{4}} + \underset{\overset{\circ}{4}}{\lfloor\!\underline{6}} + \ldots + \underset{\overset{\circ}{4}}{\lfloor\!\underline{m}} = \lfloor\!\underline{2} + \underbrace{\overset{\circ}{4} + \overset{\circ}{4} + \ldots + \overset{\circ}{4}}_{\overset{\circ}{4}} = \lfloor\!\underline{2} + \overset{\circ}{4}$$

Luego:

$$\lfloor\!\underline{2} + \lfloor\!\underline{4} + \lfloor\!\underline{6} + \ldots + \lfloor\!\underline{m} = \overset{\circ}{4} + \lfloor\!\underline{2} = \overset{\circ}{4} + 2$$

En forma análoga:

$$\lfloor\!\underline{1} + \lfloor\!\underline{3} + \underset{\overset{\circ}{4}}{\lfloor\!\underline{5}} + \ldots + \underset{\overset{\circ}{4}}{\lfloor\!\underline{n}} = \lfloor\!\underline{1} + \lfloor\!\underline{3} + \underbrace{\overset{\circ}{4} + \overset{\circ}{4} + \ldots + \overset{\circ}{4}}_{\overset{\circ}{4}}$$

$$\Rightarrow \lfloor\!\underline{1} + \lfloor\!\underline{3} + \lfloor\!\underline{5} + \ldots + \lfloor\!\underline{n} = \overset{\circ}{4} + \underbrace{\lfloor\!\underline{1} + \lfloor\!\underline{3}}_{(7)} = \overset{\circ}{4} + (\overset{\circ}{4}+3) = \overset{\circ}{4} + 3$$

Reemplazando en f: $f = \dfrac{i^{\overset{\circ}{4}+2}}{i^{\overset{\circ}{4}+3}} = \dfrac{i^2}{i^3} = i^{-1}$ $\quad\therefore f = -i$

5. Para este tipo de potencias analícese el exponente de i, porque de ello va a depender el resultado. La base del exponente expréselo en función de $\overset{\circ}{4}$ y tengáse en cuenta por aritmética lo siguiente:

$$\boxed{(\overset{\circ}{n}+K)^m = \overset{\circ}{n} + K^m} \quad ; m \in Z^+$$

Se observa $(*)$ $9^{11^{13^{15}}} = (8+1)^{11^{13^{15}}} = (\overset{\circ}{4}+1)^{11^{13^{15}}} = \overset{\circ}{4} + 1^{11^{13^{15}}} = \overset{\circ}{4} + 1$ en el ejercicio:

Luego se tiene: $i^{9^{11^{13^{15}}}} = i^{\overset{\circ}{4} + 1} = i$

6. Analicemos los exponentes para cada caso:

De (a): $D^{-\overline{UNI2000}} = \overset{\circ}{4} \Rightarrow a = i^{\overset{\circ}{4}} = 1_e$

(b): para esta parte, debemos recordar por aritmética lo siguiente:

$$(\overset{\circ}{n} - K)^m \quad (*)\ K>0 \quad \begin{cases} \Rightarrow \overset{\circ}{n} + K^m, \text{ si m es par} \\ \Rightarrow \overset{\circ}{n} - K^m, \text{ si m es impar} \end{cases}$$

Observo:

$$7^{7^{7^{7}}} = (8-1)^{7^{7^{7}}} = (\overset{\circ}{4}-1)^{7^{7^{7}}}$$ $\Rightarrow$ Es un número impar (que sea par o impar depende del número base).

$$\Rightarrow 7^{7^{7^{7}}} = \overset{\circ}{4} - 1^{7^{7^{7}}} = \overset{\circ}{4} - 1$$

Luego:

$$i^{-7^{7^{7^{7}}}} = i^{-(\overset{\circ}{4}-1)} = i^{\overset{\circ}{4}+1} \quad \therefore i^{-7^{7^{7^{7}}}} = i$$

$$\therefore (a)+(b) = 1+i$$

7. Calculamos cada sumando de "M" por separado, así:

$S_1 = i^5 + i^{-3} = i^{4+1} + i^{-4+1} = i^{\overset{\circ}{4}+1} + i^{\overset{\circ}{4}+1} \Rightarrow S_1 = i + i = 2i$

$S_2 = i^{25} + i^{-9} = i^{24+1} + i^{-8-1} = i^{\overset{\circ}{4}+1} + i^{\overset{\circ}{4}-1} \Rightarrow S_2 = i + i^{-1} = 0$

$S_3 = i^{125} + i^{-27} = i^{124+1} + i^{-28+1} = i^{\overset{\circ}{4}+1} + i^{\overset{\circ}{4}+1} \Rightarrow S_3 = i + i = 2i$

$S_4 = i^{625} + i^{-81} = i^{624+1} + i^{-80-1} = i^{\overset{\circ}{4}+1} + i^{\overset{\circ}{4}-1} \Rightarrow S_4 = i + i^{-1} = 0$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$S_{1999} = \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow S_{1999} = i + i = 2i$

$S_{2000} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad S_{2000} = i + i^{-1} = 0$

Luego: $M = \underbrace{2i + 2i + 2i + \ldots + 2i}_{1000 \text{ sumandos}}$ $\quad\therefore M = 2000i$

8. Si "n" es par (dato) $\Rightarrow (2n) = \overset{\circ}{4}$ y $(2n-1) = \overset{\circ}{4} - 1$

Calculemos numerador (N) y denominador (D) por separado

$$(*)\quad N = 2i^2 + 4i^4 + 6i^6 + 8i^8 + \ldots + (2n)i^{2n}$$

$$N = \underbrace{-2 + 4}\ \underbrace{-6 + 8}\ - \ldots \underbrace{\ldots + (2n)}$$

$$N = \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{\left(\frac{n}{2}\right)\text{sumandos}} \Rightarrow N = n$$

$$(**)\quad D = 1i^1 + 3i^3 + 5i^5 + 7i^7 + \ldots + (2n-1)i^{2n-1}$$

$$D = \underbrace{i - 3i}\ \underbrace{+5i - 7i}\ + \underbrace{\ldots - (2n-1)i}$$

$$D = \underbrace{(-2i) + (-2i) + \ldots + (-2i)}_{\left(\frac{n}{2}\right)\text{sumandos}} \Rightarrow D = -ni$$

Reemplazando, se tiene: $f = \dfrac{N}{D} = \dfrac{\cancel{n}}{-\cancel{n}i} = \dfrac{1}{-i}$ $\quad\therefore f = i$

9. I. Sea $Z=a+bi$, si $\mathbb{R}e(Z) = Z \Rightarrow a=a+bi \Rightarrow b = 0$

$\therefore$ Z es un número real .... (V)

II. Sea $Z=a+bi$, si $\mathbb{I}m(Z)=Z \Rightarrow b=a+bi \Rightarrow b=0$ y $a=b$

$\therefore$ Z es un complejo nulo .... (F)

III. Sea $Z=a+bi \Rightarrow \mathbb{R}e(Z)-\mathbb{R}e(\overline{Z})=a-a=0$(V)

IV. Sea $Z=a+bi \Rightarrow \mathbb{I}m(Z)+\mathbb{I}m(\overline{Z})=b+(-b)=0$(V)

$\therefore$ VFVV

10. Tratemos de reducir cada paréntesis por separado (hay relación entre las componentes de los complejos).

$$* \ \frac{2+3i}{2i-3} = \frac{2+3i}{2i-3} \times \frac{i}{i}\ \frac{\cancel{2i-3}}{\cancel{(2i-3)}i} = \frac{1}{i} = i^{-1} \Rightarrow \frac{2+3i}{2i-3} = i^{-1}$$

¿Podrías hacer lo mismo para los demás paréntesis? $\Rightarrow$ ¡Hágalo!; te va a quedar algo igual para cada caso. Si llamamos L a la suma pedida, se tendrá: $L = (i^{-1})^1+(i^{-1})^2+(i^{-1})^3 + \ldots +(i^{-1})^{67}$

$$L = \underbrace{i^{-1}+i^{-2}+i^{-3}+i^{-4}}_{0} + \ldots\ldots + \underbrace{i^{-67}+i^{-68}}_{0} - i^{-68} \text{ (quita y pon)}$$

<u>Propiedad</u>: la suma de 4 potencias consecutivas de i es cero:

$$\Rightarrow L = -i^{-68} = -i^{\overset{\circ}{4}} \qquad \therefore L = -1$$

11. Trabajemos por partes con criterios ya conocidos (ejercicio 5 y 6).

- $1^{2^{3^4}} = 1$
- $2^{3^{4^5}} = \overset{\circ}{4}$ (Toda base 2 elevado a exponente mayor o igual que 2, su potencia es $\overset{\circ}{4}$)
- $3^{4^{5^6}} = (\overset{\circ}{4}-1)^{4^{5^6}}$; $4^{5^6} \Rightarrow$ # par $\Rightarrow 3^{4^{5^6}} = \overset{\circ}{4}+1$
- $4^{5^{6^7}} = (\overset{\circ}{4})^{5^{6^7}} \Rightarrow 4^{5^{6^7}} = \overset{\circ}{4}$
- $6^{7^{8^9}} = (\overset{\circ}{4}+2)^{7^{8^9}} = \overset{\circ}{4} + 2^{7^{8^9}}$; $2^{7^{8^9}} \Rightarrow \overset{\circ}{4}$ $\Rightarrow 6^{7^{8^9}} = \overset{\circ}{4}$
- $7^{9^{11^{13}}} = (\overset{\circ}{4}-1)^{9^{11^{13}}}$; $9^{11^{13}} \Rightarrow$ # impar $\Rightarrow 7^{9^{11^{13}}} = \overset{\circ}{4}-1$

Reemplazando tenemos:

$$M = \frac{i + i^{\overset{\circ}{4}} + i^{\overset{\circ}{4}+1} + i^{\overset{\circ}{4}}}{-i^{-(\overset{\circ}{4}+1)} + 2i^{-\overset{\circ}{4}} - 3i^{-(\overset{\circ}{4}-1)}} \quad ; \quad \underline{\text{Recuerde:}} \quad i^{\overset{\circ}{4}} = i^{-\overset{\circ}{4}} = 1$$

$$M = \frac{i+1+i+1}{\underbrace{-i^{-1}}_{i}+2-3i} = \frac{\cancel{2}(1+i)}{\cancel{2}(1-i)} \Rightarrow M = \frac{1+i}{1-i} \left(\begin{array}{c}\text{Multiplicamos por}\\ \text{el conjugado del}\\ \text{divisor}\end{array}\right)$$

$$M = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1^2-i^2} = \frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}} \qquad \therefore M = \frac{1+i}{1-i} = i = 0+i$$

12. Por el problema anterior se demuestra que:

$$\boxed{\frac{1+i}{1-i} = i} \Rightarrow \frac{1-i}{1+i} = i^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{1-i}{1+i} = -i}$$

En el problema:

$$f = \frac{(1+i)^6}{4i + \dfrac{(1-i)^4}{-i + \dfrac{1-i}{1+\boxed{\dfrac{1+i}{1-i}}=i}}} = \frac{(1+i)^6}{4i + \dfrac{(1-i)^4}{-i+\boxed{\dfrac{1-i}{1+i}}=-i}} = \frac{(1+i)^6}{4i + \dfrac{(1-i)^4}{\boxed{-2i}}}$$

$$f = \frac{(1+i)^6}{4i + \dfrac{(1-i)^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{(1-i)^2}}} = \frac{(1+i)^6}{4i + \underbrace{(1-i)^2}_{-2i}} = \frac{(1+i)^6}{2i} = \frac{(1+i)^6}{(1+i)^2} = (1+i)^4$$

$$\therefore f = -4$$

13. I. Si $Z = x+yi$ $\qquad Z^{-1} = \dfrac{1}{x+yi}$ $\qquad Z^{-1} = \dfrac{1}{x+yi} \times \dfrac{x-yi}{x-yi} = \dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$

$x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$

Observación:

$Z^{-1} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2}i \quad \therefore \mathbb{R}e(Z^{-1}) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ .... (V)

II. Si $n = \overset{\circ}{4} \Rightarrow n = 4k,\ k \in \mathbb{Z} \begin{cases} (1+i)^n = [(1+i)^4]^k = (-4)^k \\ (1-i)^n = [(1-i)^4]^k = (-4)^k \end{cases} = \ \therefore (1+i)^n = (1-i)^n,\ \forall n = \overset{\circ}{4}$ .... (V)

III. Sea $\underline{Z=a+bi} \Rightarrow iZ = (a+bi)i \Rightarrow i\underline{Z=-b+ai}$

$\therefore \mathbb{R}e(Z) = a = \mathbb{I}m(iZ) \wedge \mathbb{I}m(Z)+\mathbb{R}e(iZ) = b-b = 0$ .... (V)

IV. Esta afirmación es falsa, no se puede decir: $Z_1 < Z_2$ porque entre números complejos no existe relación de orden .... (F)

$\therefore$ VVVF

14. Expresemos los exponentes 502 y 501 en función de múltiplos de 4 más próximos:

$$502 = 500 + 2 \quad y \quad 501 = 500 + 1 \Rightarrow H = \frac{(1-i)^{500}.(1-i)^2+(1+i)^{500}.(1+i)}{(1+i)^{500}.(1+i)^2+(1-i)^{500}.(1-i)}$$

Observación: $500 = \overset{\circ}{4} \Rightarrow (1+i)^{500} = (1-i)^{500}$ (por la afirmación II del problema anterior); luego se puede escribir:

$$H = \frac{\cancel{(1-i)^{500}}[(1-i)^2+(1+i)]}{\cancel{(1+i)^{500}}[(1-i)^2+(1-i)]} = \frac{-2i+1+i}{2i+1-i} = \boxed{\frac{1-i}{1+i}}$$

$$\therefore H = -i$$

15. Siendo $Z = a+bi$, $\overline{Z} = a-bi$ y $Z^{*} = -a-bi$

$\Rightarrow\ i\overline{Z} = b+ai$ y $iZ^{*} = b-ai$

Luego: $\alpha = \dfrac{a^2}{(a+bi)^2} + \dfrac{a^2}{(a-bi)} + \dfrac{2abi}{(b+ai)^2}$ y $\beta = \dfrac{b^2}{(a+bi)} + \dfrac{b^2}{(a-bi)^2} + \dfrac{2abi}{(b-ai)^2}$

$$\Rightarrow \alpha-\beta = \overbrace{\frac{a^2-b^2}{(a+bi)^2} + \frac{a^2-b^2}{(a-bi)^2}} + \overbrace{\frac{2abi}{(b+ai)^2} - \frac{2abi}{(b-ai)^2}}$$

$$\alpha-\beta = (a^2-b^2)\overbrace{\left[\frac{(a-bi)^2+(a+bi)^2}{(a+bi)^2(a-bi)^2}\right]}^{\text{Legendre}} - 2abi\overbrace{\left[\frac{(b+ai)^2-(b-ai)^2}{(b+ai)^2(b-ai)^2}\right]}^{\text{Legendre}}$$

$$\alpha-\beta=(a^2-b^2)\left[\frac{2(a^2+b^2i^2)}{(a^2-b^2i^2)^2}\right] - 2abi\left[\frac{4bai}{(b^2-a^2i^2)^2}\right]$$

$$\alpha-\beta=(a^2-b^2)\left[\frac{2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\right] - \frac{8a^2b^2i^2}{(b^2+a^2)^2} = \frac{2(a^2-b^2)^2+8a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\alpha-\beta = 2\left[\frac{\cancel{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}}{\cancel{(a^2+b^2)^2}}\right] \qquad \therefore\ \alpha-\beta=2$$

16. (*) Sea $\overline{Z}V \Rightarrow$ su conjugado es $\overline{\overline{Z}V} = \overline{\overline{Z}}\,\overline{V} = Z\overline{V}$ .... (V)

(*) $-4i<0$ es falso porque $\nexists$ relación de orden en $\mathbb{C}$ .... (F)

(*) $(1+i)^3 + (1-i)^3 = 2i(1+i) - 2i(1-i) = 2i(1+i-1+i) = 2i(2i)$

$\therefore\ (1+i)^3 + (1-i)^3 = -4$ .... (V)

(*) $i^{-(2n+1)} = (i^{-1})^{2n+1} = (-i)^{2n+1}$,

observación: $(2n+1) \Rightarrow$ # impar $\Rightarrow\ i^{-(2n+1)} = -i^{2n+1}$ .... (V)

$\therefore$ VFVV

17. La 4ta proposición del problema anterior dice $i^{-(2n+1)} = -i^{2n+1}$

$\Rightarrow\ Z_1 = (1-i^3)^3$; $Z_2 = (1-i^5)^5$; $Z_3 = (-1-i)^6$ o también: $Z_1=(1+i)^3$, $Z_2=(1-i)^5$ y $Z_3=(1+i)^6$

donde: $(Z_3 \div Z_1)^5 = (1+i)^{15}$; $Z_2^{\,3} = (1-i)^{15}$; $Z_1Z_2Z_3 = (1+i)^9(1-i)^5$

luego: $K = \dfrac{(1+i)^{15}+(1-i)^{15}}{(1+i)^9(1-i)^5}$, pero $(1+i)^{12} = (1-i)^{12}$

$\Rightarrow\ K = \dfrac{(1+i)^{12}\left[\cancel{(1+i)^3+(1-i)^3}\right]}{(1+i)^9\cancel{(1-i)^4}(1-i)}$ $\rightarrow -4$ (problema anterior)

y $(1-i)^4 = -4$ (conocido)

De aquí: $K = \dfrac{(1+i)^3}{1-i} = (1+i)^2\left[\dfrac{1+i}{1-i}\right] = (2i)(i)$ $\therefore\ K=-2$

18. Por dato: $\dfrac{a+bi}{c+di} = K$ (# real) $\Rightarrow\ a+bi = Kc+Kdi$

Por igualdad de complejos: $a = Kc$ y $b = Kd$

De aquí, se tiene: $\boxed{\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = K}$ o también: $a\,.\,d = b\,.\,c$

19. Por dato: $\dfrac{a+bi}{c+di} = Ki \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow\ a+bi = -Kd+Kci$

Por igualdad de complejos: $a=-Kd$ y $b=Kc$

De aquí: $\boxed{-\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{c} = K}$ o también: $a\,.\,c + b\,.\,d = 0$

20. Observación: $\dfrac{16+4^a i}{2^b+(b-a)i} = 4i \Rightarrow$ (imaginario puro)

$\Rightarrow$ Por la propiedad anterior, se debe cumplir: $-\dfrac{16}{b-a} = \dfrac{4^a}{2^b} = 4$

De aquí:
$$\left.\begin{array}{lcl} -16 = 4(b-a) & \Rightarrow & a-b=4 \\ 2^{2a-b} = 2^2 & \Rightarrow & 2a-b=2 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} a=-2 \\ b=-6 \end{array}$$

Luego: $(a^{-b}+b^{-a})^{2^{-1}} = \left[(-2)^6+(-6)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ $\therefore\ (a^{-b}+b^{-a})^{2^{-1}} = 10$

21. Planteamos abreviadamente:

$$\text{El op. del }\underbrace{\text{conj. del }\underbrace{\text{op. de }[(2+n)+(m-6)i]}_{[-(2+n)-(m-6)i]}}_{[-(2+n)+(m-6)i]} = \text{conj. de }\underbrace{[(m+9i)-(5+n)i]}_{[(m-5)+(9-n)i]}$$

$$(2+n)-(m-6)i = (m-5)-(9-n)i$$

Por igualdad de complejos:

$$\left.\begin{array}{l} \odot\ 2+n = m-5 \Rightarrow m-n=7 \\ \odot\ m-6 = 9-n \Rightarrow m+n=15 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} m=11 \\ n=4 \end{array}$$

Luego: $m + ni = 11+4i$

$$\therefore\ \text{Conj. del op. del }\underbrace{\underbrace{\text{conj. de}(11+4i)}_{(11-4i)}}_{(-11+4i)} = -11-4i$$

22. Por dato: $a-bi = \dfrac{2+ni}{2-ni} \Rightarrow 2a-2bi-ani-bn=2+ni \Rightarrow (2a-bn)+(-2b-an)i=2+ni$ (complejos iguales)

De aquí:

$$\left.\begin{array}{l} \odot\ 2a-bn=2 \Rightarrow n=\dfrac{2a-2}{b} \\ \odot\ -2b-an=n \Rightarrow n=\dfrac{-2b}{a+1} \end{array}\right\}\ \frac{2a-2}{b} = \frac{-2b}{a+1}$$

$$\Rightarrow\ 2a^2-\cancel{2a}+\cancel{2a}-2=-2b^2 \qquad \therefore\ a^2+b^2=1$$

23. Hallemos el cociente de $(a+bi)\div(a-bi)$, multiplicamos por el conjugado del divisor, así:

$$\frac{a+bi}{a-bi}\times\frac{a+bi}{a+bi} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2-b^2i^2} = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)i$$

Por dato: $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)i=\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}i$

$\Rightarrow\ A=a^2-b^2 \quad ; \quad B=2ab \quad ; \quad C=a^2+b^2 \qquad \therefore \quad A^2+B^2=C^2$

24. Expresamos K como la división de 2 complejos en forma binómica y multipliquemos por la conjugada del divisor, así: $K=\dfrac{(a+b)+(a-b)i}{(a-b)+(a+b)i}\times\dfrac{(a-b)-(a+b)i}{(a-b)-(a+b)i}$

Efectuando: $K=\dfrac{(a^2-b^2)-\overline{(a+b)^2i+(a-b)^2i}+(a^2-b^2)}{(a-b)^2-(a+b)^2i^2}$

$K=\dfrac{2(a^2-b^2)-[(a+b)^2-(a-b)^2]i}{(a+b)^2+(a-b)^2}=\dfrac{2(a^2-b^2)-4abi}{2(a^2+b^2)}$

$K=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i \qquad \therefore\ \text{Re}\,(K)=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

25. Sea $z=a+bi \ / -z^2=\overline{z} \Rightarrow -(a+bi)^2=a-bi \Rightarrow (-a^2+b^2)-2abi=a-bi$ (complejos iguales)

De aquí: $*\ -a^2+b^2=a \ldots\ldots (1)$

$*\ 2ab=b \Rightarrow b(1-2a)=0 \ldots\ldots (2)$

De (2): si: $b=0$, en (1): $-a^2=a \Rightarrow a(1+a)=0$

Observación: $a=0 \ \vee\ a=-1$

De aquí, los complejos "z" son: 0 y -1

De (2): si $a=\dfrac{1}{2}$, en (1): $-\dfrac{1}{4}+b^2=\dfrac{1}{2} \Rightarrow b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

De esto, los complejos "z" son: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore$ Existen 4 números complejos

26. El dato dice: $\sqrt[3]{a+bi}=x+yi$ (no piden x ni y, sino "s")

Elevemos al cubo: $a+bi=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i \Rightarrow a+bi=(x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)i$ (complejos iguales)

De aquí: $*\ a=x^3-3xy^2 \Rightarrow \dfrac{a}{x^3}=\dfrac{x^3-3xy^2}{x^3} \Rightarrow \dfrac{a}{x^3}=1-\dfrac{3xy^2}{x^3}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{x^3}-1=-\dfrac{3y^2}{x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

Además: $*\ b=3x^2y-y^3 \Rightarrow \dfrac{b}{y^3}=\dfrac{3x^2y-y^3}{y^3} \Rightarrow \dfrac{b}{y^3}=\dfrac{3x^2y}{y^3}-1$

$\Rightarrow \dfrac{b}{y^3}+1=\dfrac{3x^2}{y^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

Ahora (1)×(2): $\left(\dfrac{a}{x^3}-1\right)\left(\dfrac{b}{y^3}+1\right)=\left(-\dfrac{3\cancel{y^2}}{\cancel{x^2}}\right)\left(\dfrac{3\cancel{x^2}}{\cancel{y^2}}\right)=-9$

27. Planteamos: $\dfrac{\sqrt{12-16i}}{1-i}=\underbrace{a+bi}_{\text{cociente}} \ / \ a<b$ (Dato)

$\Rightarrow \sqrt{12-16i}=(a+b)-(a-b)i \Rightarrow 12-16i=\underbrace{(a+b)^2-(a-b)^2}_{\textit{Legendre}}-2(a^2-b^2)i$

Luego: $12-16i=4ab-2(a^2-b^2)i$ (complejos iguales)

Observación:

$$\left.\begin{array}{l} *\ \ 4ab=12 \Rightarrow ab=3 \\ *\ \ 2(a^2-b^2)=16 \Rightarrow a^2-b^2=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=3 \ \wedge\ b=1 \ldots\ldots (1) \\ \text{ó}\ \ a=-3 \ \wedge\ b=-1 \ldots\ldots (2) \end{array}$$

Pero como $a<b$ (por dato), consideramos (2): $a=-3 \wedge b=-1$

$\therefore$ El cociente es: $-3-i$

28. Recordemos: $\boxed{2Re(Z)=Z+\overline{Z}}$, con esto:

$*\ 2\mathbb{R}e\left(\dfrac{2+3i}{7+2i}\right)=\dfrac{2+3i}{7+2i}+\left(\overline{\dfrac{2+3i}{7+2i}}\right)=\dfrac{2+3i}{7+2i}+\dfrac{\overline{2+3i}}{\overline{7+2i}}=\dfrac{2+3i}{7+2i}+\dfrac{2-3i}{7-2i}$

$*\ 2\mathbb{R}e\left(\dfrac{5-i}{7+2i}\right)=\dfrac{5-i}{7+2i}+\left(\overline{\dfrac{5-i}{7+2i}}\right)=\dfrac{5-i}{7+2i}+\dfrac{\overline{5-i}}{\overline{7+2i}}=\dfrac{5-i}{7+2i}+\dfrac{5+i}{7-2i}$

Sumamos miembro a miembro y reducimos las fracciones homogéneas:

$\Rightarrow 2\mathbb{R}e\left(\dfrac{2+3i}{7+3i}\right)+2\mathbb{R}e\left(\dfrac{5-i}{7+2i}\right)=\dfrac{\cancel{7+2i}}{\cancel{7+2i}}+\dfrac{\cancel{7-2i}}{\cancel{7-2i}}=2 \qquad \therefore\ \mathbb{R}e\left(\dfrac{2+3i}{7+2i}\right)+\mathbb{R}e\left(\dfrac{5-i}{7+2i}\right)=1$

29. Sea: $Z=a+bi \Rightarrow \overline{Z}=a-bi$ y $Z^*=-a-bi$

Observación: $Z.\overline{Z}=a^2+b^2$ y $Z+Z^*=0$; reemplazando en la igualdad dada:

$\dfrac{a^2+b^2+10(a-bi)+41}{10}=-(1+i)^2(1+i)$

$(a^2+b^2+10a+41)-10bi=-10(2i)(1+i)=20-20i$

Por igualdad de complejos : $\begin{cases} ① \ a^2+b^2+10a+41=20 \\ ② \ -10b=-20 \Rightarrow b=2 \end{cases}$

b en ① $a^2+b^2+10a+41=20 \Rightarrow a^2+10a+25=0$

$\Rightarrow (a+5)^2=0$, de aquí: $a=-5$

Luego:

$Z=a+bi=-5+2i$, nos piden: $S=|Z+(10\,;\,-4)| \Rightarrow S=|(-5+2i)+(10-4i)|=|5-2i|=\sqrt{5^2+(-2)^2}$

$\therefore\ S=\sqrt{29}$

30. Transformemos "Z" de abajo hacia arriba. !OJOi: $(1+i)(1-i)=2$

Observación:

$$Z=\frac{i}{1+i+\dfrac{i}{1-i+\dfrac{i}{1+i}}}=\frac{i}{1+i+\dfrac{i(1+i)}{2+i}}=\frac{i(2+i)}{(1+i)(2+i)+i(1+i)}$$

$$Z=\frac{i(2+i)}{(1+i)(2+i+i)}=\frac{i(2+i)}{2(1+i)^2}=\frac{\cancel{i}(2+i)}{2(2\cancel{i})}=\frac{2+i}{4}$$

Luego: $Z=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i \Rightarrow |Z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2} \quad \therefore \ |Z|=\frac{\sqrt{5}}{4}$

31. Transformando: $K=\frac{(1-i)^4(1-i)-1}{(1+i)^4(1+i)+1}-\frac{(1-i)^4(1-i)^2-1}{(1+i)^4(1+i)^2+1}$

Pero: $(1+i)^4=(1-i)^4=-4$; $(1+i)^2=2i$; $(1-i)^2=-2i$

$\Rightarrow K=\frac{-4(1-i)-1}{-4(1+i)+1}-\frac{-4(-2i)-1}{-4(2i)+1}=\frac{-5+4i}{-3-4i}-\frac{8i-1}{-8i+1}$

$K=\frac{-(5-4i)}{-(3+4i)}-\frac{\cancel{8i-1}}{-(\cancel{8i-1})}=\frac{5-4i}{3+4i}+1$

$\Rightarrow K=\frac{8}{3+4i} \quad \therefore \ |K|=\frac{|8|}{|3+4i|}=\frac{8}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{8}{5}=1{,}6$

32. Para que $[x^2-3(y-20i)] \wedge (-19+3x^2yi)$ sean complejos opuestos, se debe cumplir que su suma debe ser cero.

$\Rightarrow (x^2-3y+60i)+(-19+3x^2yi)=0$, reduciendo: $(x^2-3y-19)+(3x^2yi+60)i=0+0i$ (complejos iguales)

$\Rightarrow x^2-3y-19=0 \ \wedge \ 3x^2y+60=0$

De aquí:

$$\left.\begin{array}{l} x^2-3y=19 \\ x^2(3y)=-60 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} x^2=4 \ \wedge \ 3y=-15 & \dots(1) \\ x^2=15 \ \wedge \ 3y=-4 & \dots(2) \end{array} \quad ó \quad \begin{array}{ll} x^2=-4 \ \wedge \ 3y=-15 & \dots(3) \\ x^2=-15 \ \wedge \ 3y=-4 & \dots(4) \end{array}$$

De (1): $x=2$ ó $-2 \wedge y=-5 \Rightarrow x+yi=2-5i$ ó $x+yi=-2-5i$

$\therefore$ Para cualesquiera de los 2 casos: $|x+yi|=\sqrt{29}$

De (2): No hay valor entero para "x"

33. Sea $Z=a+bi \,/\, Z.\overline{Z}=7\mathrm{Im}(Z) \Rightarrow (a+bi)(a-bi)=7b$

Observación: $a^2+b^2=7b$

Pero nos piden: $|Z-3{,}5i|=|a+bi-\frac{7}{2}i|$

$\Rightarrow |Z-3{,}5i|=\left|a+\left(b-\frac{7}{2}\right)i\right|=\sqrt{a^2+\left(b-\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+b^2-7b+\frac{49}{4}}$

como: $a^2+b^2=7b$ $\qquad \therefore \ |Z-3{,}5i|=\frac{7}{2}=3{,}5$

34. Hacemos la expresión dada igual a Z. ¿No es cierto que el problema tiene la forma:

$$Z=\frac{M^5.\sqrt[7]{N}^2}{P^4.Q}\ ?$$

Hallemos su módulo y aplíquese propiedades para módulo. Sea observador en lo que ocurre.

$$\left|\frac{M^5.\sqrt[7]{N}^2}{P^4.Q}\right|=\frac{|M^5.\sqrt[7]{N}^2|}{|P^4.Q|}=\frac{|M^5|\,|\sqrt[7]{N}^2|}{|P^4|\,|Q|}=\frac{|M|^5\times\sqrt[7]{|N|}^2}{|P|^4.|Q|}$$

Respondiendo M, U, P, Q por sus equivalentes se tiene:

$$|Z|=\frac{|3+5i|^5.\sqrt[7]{|1-i|}^2}{|\sqrt{26}-2\sqrt{2}i|^4\,|\sqrt[7]{2}+\sqrt[7]{2}i|}=\frac{\sqrt{34}^5\times\sqrt[7]{\sqrt{2}}^2}{\sqrt{34}^4\times\sqrt{2\sqrt[7]{2}^2}}$$

Observación: * $|3+5i|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

* $|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$
* $|\sqrt{26}-2\sqrt{2}i|=\sqrt{26+8}=\sqrt{34}$
* $|\sqrt[7]{2}+\sqrt[7]{2}i|=\sqrt{\sqrt[7]{2}^2+\sqrt[7]{2}^2}=\sqrt{2\sqrt[7]{2}^2}$

Luego: $|Z|=\frac{\cancel{\sqrt{34}^4}\times\sqrt{34}\times\cancel{\sqrt[14]{2}^2}}{\cancel{\sqrt{34}^4}\times\sqrt{2}\times\cancel{\sqrt[14]{2}^2}}=\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \ |Z|=\sqrt{17}$

35. Sea el complejo: $Z=a+bi \,/\, (a+bi)\overline{(-2-i)^2}=\#\text{real}$ (dato)

Observación:

$(a+bi)\overline{(-2-i)^2}=(a+bi)\overline{(-2-i)^2}=(a+bi)(-2+i)^2=(a+bi)(3-4i)=3a-4bi^2-4ai+3bi=\#\text{real}$

$\Rightarrow (3a+4b)+(3b-4a)i=\#\text{real}$

Observación:

Para que sea # real $\quad 3b-4a=0 \Rightarrow 4a=3b$

$\Downarrow \quad \Downarrow$

Siendo a y b enteros y positivos de un dígito $\Rightarrow$

3	4
6	8

Pero como $|Z|$ es máximo por dato, tendríamos que considerar:

$a=6$ y $b=8 \Rightarrow Z=6+8i \quad \therefore \ |Z|=10$

36. Aplicando propiedades para la conjugación, se tiene:

$\overline{Z(-Z-1)}=\frac{5}{2} \Rightarrow \overline{-Z^2-Z}=\frac{5}{2}$ (Le tomamos conjugada a ambos miembros)

$\Rightarrow \overline{\overline{-(Z^2+Z)}}=\overline{\left(\frac{5}{2}\right)} \Rightarrow -(Z^2+Z)=\frac{5}{2} \Rightarrow Z^2+Z=-\frac{5}{2}$ .... (I)

Ahora decimos: sea $Z=a+bi \ / \ Z\notin\mathbb{R} <> b\neq 0$ *(dato)*

En (I): $(a+bi)^2+(a+bi)=-\frac{5}{2} \Rightarrow (a^2-b^2+a)+(2ab+b)i=-\frac{5}{2}+0i$

De aquí, por igualdad de complejos tenemos:

$$* \quad a^2-b^2+a=-\frac{5}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$* \quad b(2a+1)=0 \Rightarrow b=0 \vee a=-\frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Pero como $b\neq 0$ (por dato), consideramos de (2): $a=-\dfrac{1}{2}$

En (1): $\dfrac{1}{4}-b^2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2} \Rightarrow b^2=\dfrac{9}{4}$, de aquí $b=\dfrac{3}{2}$ ó $-\dfrac{3}{2}$

Luego: $Z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{3}{2}i \qquad \therefore \; |Z|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\pm\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

37. Suponemos los complejos: $Z_1=a+bi$ y $Z_2=c+di$

Dato: $Z_1-Z_2=(a-c)-(8+d)i=10-10i$ (complejos iguales)

$\Rightarrow$ * $a-c=10$ y $8+d=10 \Rightarrow d=2$

Otro dato: $\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{a-8i}{c+2i}=\#\text{real} \Rightarrow \dfrac{a}{c}=\dfrac{-8}{2}$ (Propiedad del problema Nº 18)

Observación: $a=-4c \Rightarrow$ como $a-c=10 \Rightarrow -5c=10 \Rightarrow c=-2$

Observo: $a=8$

Luego: $Z_1=8-8i$ y $Z_2=-2+2i$

Nos piden: $M=\left|\dfrac{1}{Z_1}\right|+\left|\dfrac{1}{Z_2}\right|=\dfrac{1}{|Z_1|}+\dfrac{1}{|Z_2|}$ ..... (Propiedad)

Pero: $|Z_1|=\sqrt{8^2+(-8)^2}=8\sqrt{2}$ y $|Z_2|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow M=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{5}{8\sqrt{2}}$, racionalizando: $\therefore \; M=\dfrac{5\sqrt{2}}{16}$

38. Recordemos: $|Z_2|^2=Z.\overline{Z}$ y $Z+\overline{Z}=2\mathbb{R}e(Z)$

Observación: $|Z_1+Z_2|^2=(Z_1+Z_2)(\overline{Z_1+Z_2})=(Z_1+Z_2)(\overline{Z_1}+\overline{Z}_2)$

$$=Z\overline{Z}_1+Z_1\overline{Z}_2+Z_2\overline{Z}_1+Z_2\overline{Z}_2$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$=|Z_1|^2+\underbrace{Z_1\overline{Z}_2+\overline{Z_1\overline{Z}_2}}+|Z_2|^2 \; ; \; (|Z_1|=|Z_2|=\underset{\text{Dato}}{\sqrt{5}})$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$|Z_1+Z_2|^2=5+2\mathbb{R}e(Z_1\overline{Z}_2)+5$$

Observación: $|Z_1+Z_2|^2-10=2\mathbb{R}e(Z_1\overline{Z}_2) \quad \therefore \; \dfrac{|Z_1+Z_2|^2-10}{2\mathbb{R}e(Z_1\overline{Z}_2)}=2$

39. Hallemos por partes:

$$* \; |1+Z\omega|^2=(1+Z\omega)(\overline{1+Z\omega})=(1+Z\omega)(\overline{1}+\overline{Z\omega})$$

$$=(1+Z\omega)(1+\overline{Z\times\omega})=1+\underbrace{\overline{Z\times\omega}+Z\times\omega}_{2\mathbb{R}e(Z\omega)}+Z\times\omega\times\overline{Z}\times\overline{\omega}$$

$$\Rightarrow |1+z\omega|^2=1+2\mathbb{R}e(Z\omega)+|Z|^2|\omega|^2$$

$$* \; |Z\omega|^2=(|Z|\,|\omega|)^2=|Z|^2|\omega|^2$$

Luego: $P=1+2\mathbb{R}e(Z\omega)+\cancel{|Z|^2|\omega|^2}-\cancel{|Z|^2|\omega|^2}$

$\therefore \; P=2\mathbb{R}e(Z\omega)+1$

40. Si:

$$Z=\frac{i-a}{1+3ai} \Rightarrow Z-\frac{2}{3}i=\frac{i-a}{1+3ai}-\frac{2}{3}i=\frac{3i-3a-2i+6a}{3(1+3ai)}$$

$$\Rightarrow Z-\frac{2}{3}i=\frac{3a+i}{3(1+3ai)} \Rightarrow \left|Z-\frac{2}{3}i\right|=\frac{|3a+1|}{|3|\,|1+3ai|}=\frac{\cancel{\sqrt{9a^2+1}}}{3\times\cancel{\sqrt{1+9a^2}}}$$

$$\therefore \; \left|Z-\frac{2}{3}i\right|=\frac{1}{3}$$

41. Suponemos: $Z=a+bi$, nos piden $\overline{Z}=?$; $a\wedge b\in\mathbb{Z}$ (dato)

De: $\left|\dfrac{Z-2}{Z-6}\right|=1 \Rightarrow |Z-2|=|Z-6| \Rightarrow |(a-2)+bi|=|(a-6)+bi|$

De aquí: $\sqrt{(a-2)^2+b^2}=\sqrt{(a-6)^2+b^2}$

Elevando al cuadrado:

$$(a-2)^2+\cancel{b^2}=(a-6)^2+\cancel{b^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{a^2}-4a+4=\cancel{a^2}-12a+36 \Rightarrow a=4$$

De: $\left|\dfrac{Z-2}{Z-6i}\right|=\dfrac{\sqrt{205}}{41} \Rightarrow 41|Z-2|=\sqrt{205}\,|Z-6i|$

Ojo: $Z=4+bi$

$\Rightarrow 41|2+bi|=\sqrt{205}\,|4+(b-6)i| \Rightarrow 41\sqrt{4+b^2}=\sqrt{205}.\sqrt{16+(b-6)^2}$

Elevando al cuadrado:

$$\cancel{41}^2(4+b^2)=\underset{5}{\cancel{205}}[16+(b-6)^2]$$

$$\Rightarrow 164+41b^2=80+5b^2-60b+180 \Rightarrow 36b^2+60b-96=0$$

ó $3b^2+5b-8=0 \Rightarrow (3b+8)(b-1)=0 \Rightarrow b=-\dfrac{8}{3}$ ó $b=1$

$$\begin{array}{lcr} 3b & \times & 8 \\ b & & -1 \end{array}$$

como $b\in Z \Rightarrow b=1$

Luego: $Z=4+i \qquad \therefore \; \overline{Z}=4-i$

42. Sea el complejo buscado Z_1 ; nos piden $\mathrm{Im}(Z_1)=?$

Por dato: $(1-\sqrt{2}i)^4-Z_1=2(\cos 315°+i\,\mathrm{sen}315°)$

De aquí: $(-1-2\sqrt{2}i)^2-Z_1=2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$

O también: $(-7+4\sqrt{2}i)-Z_1=\sqrt{2}-\sqrt{2}i \Rightarrow Z_1=(-7-\sqrt{2})+5\sqrt{2}i$

$\therefore\ \mathrm{Im}(Z_1)=5\sqrt{2}$

43. Observación:

$$G=\left[\frac{\sqrt[3]{2^7}\,i^{\overset{\circ}{4}+3}+4\sqrt[3]{2}\,i^{\overset{\circ}{4}+2}}{i^{\overset{\circ}{4}+3}+i^{\overset{\circ}{4}+3}}\right]^3=\left[\frac{4\sqrt[3]{2}(-i)+4\sqrt[3]{2}(-1)}{(-i)+(-i)}\right]^3$$

$$G=\left[\frac{4\sqrt[3]{2}(-i-1)}{-2i}\right]^3=\left[2\sqrt[3]{2}\left(\frac{i+1}{i}\right)\right]^3=[2\sqrt[3]{2}(1-i)]^3$$

$\Rightarrow G=16(1-i)^3=16(-2i)(1-i)\Rightarrow G=32(-1-i)$

Observación: de $(-1-i)$: $a=-1 \wedge b=-1 \Rightarrow \theta(\arg)\in \mathrm{IIIC} \Rightarrow \theta=\pi+\alpha$

Donde: $\mathrm{tg}\alpha=\left|\frac{-1}{-1}\right|=1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$

Luego: $\theta=\frac{5}{4}\pi$

Además: $r=|-1-i|=\sqrt{2} \Rightarrow -1-i=\sqrt{2}\,cis\frac{5}{4}\pi \qquad \therefore\ G=32\sqrt{2}\,cis\frac{5}{4}\pi$

44. Apliquemos MOIVRE para cada paréntesis (1er miembro):

$$\frac{(10cis93°)(6cis60°)}{(2cis53°)(15cis30°)}=\frac{(10\times 6)cis(93°+60°)}{(2\times 15)cis(33°+30°)}<>(1+i)^n$$

De aquí se tiene: $\left(\frac{60}{30}\right)cis(153°-63°)<>(1+i)^n$

$\Rightarrow 2(\underbrace{\cos 90°}_{0}+i\underbrace{\mathrm{sen}90°}_{1})<>(1+i)^n \Rightarrow 2i<>(1+i)^n$

$\therefore\ n=2$

45. Sabemos que: la ubicación del argumento está en función de los signos de las componentes del número complejo.

* Sea $Z_1=4+3i \Rightarrow 4>0 \wedge 3>0 \Rightarrow \theta_1\in \mathrm{IC} \Rightarrow \theta_1=\alpha$

$\mathrm{tg}\alpha=\left|\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha=37° \Rightarrow \theta_1=37°$

Observación: $\mathrm{Arg}(Z_1)=37° \Rightarrow \mathrm{Arg}(Z_1^3)=3\times 37°=111°$

* Sea $Z_2=-1+i \Rightarrow -1<0 \wedge 1>0 \Rightarrow \theta_2\in \mathrm{IIC} \Rightarrow \theta_2=180°-\alpha$

$\mathrm{tg}\alpha=\left|\frac{1}{-1}\right|=1 \Rightarrow \alpha=45° \Rightarrow \theta_2=135°$

Observación: $\mathrm{Arg}(Z_2)=135° \Rightarrow \mathrm{Arg}(Z_2^4)=4\times 135°=540°$

* Sea $Z_3=-\sqrt{3}-i \Rightarrow -\sqrt{3}<0 \wedge -1<0 \Rightarrow \theta_3\in \mathrm{IIIC} \Rightarrow \theta_3=180°+\alpha$

$\mathrm{tg}\alpha=\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha=30° \Rightarrow \theta_3=210°$

Observación: $\mathrm{Arg}(Z_3)=210° \Rightarrow \mathrm{Arg}(Z_3^2)=2\times 210°=420°$

Como: $Z=\frac{Z_1^3\times Z_2^4}{Z_3^2} \Rightarrow \mathrm{Arg}(Z)=\mathrm{Arg}(Z_1^3)+\mathrm{Arg}(Z_2^4)-\mathrm{Arg}(Z_3^2)$

$\therefore\ \mathrm{Arg}(Z)=231°$

46. Transformemos de manera menos laboriosa, podría ser así:

* $(1+\sqrt{3}i) \Rightarrow r=2$ y $\mathrm{Arg}\in \mathrm{IC} \Rightarrow \mathrm{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta=60°$

Se puede escribir: $\frac{(1+\sqrt{3}i)^{39}}{(1-i)^{40}}=\frac{(2cis60°)^{39}}{[(1-i)^4]^{10}}=\frac{2^{39}cis2340°}{(-4)^{10}}$

Descontamos número entero de vueltas: $cis2340°=cis(\cancel{6\times 360°}+180°)$

Luego: $\frac{(1+\sqrt{3}i)^{39}}{(1-i)^{40}}=\frac{2^{39}(\cos 180°+i\,\mathrm{sen}180°)}{4^{10}}=\frac{2^{39}(-1+0)}{2^{20}} \qquad \therefore\ \frac{(1+\sqrt{3}i)^{39}}{(1-i)^{40}}=-2^{19}$

47. Expresemos los complejos mostrados de "f" en forma adecuada.

* $\boxed{1+\sqrt{3}i}$ → $r=2$; → $\mathrm{tg}\theta=\sqrt{3} \Rightarrow \theta=30°$ ⇒ $1+\sqrt{3}i=2cis60°$

* $\cos 8°-i\,\mathrm{sen}8°=\cos(-8°)+i\,\mathrm{sen}(-8°)$
* $\mathrm{sen}55°+i\cos 55°=\cos 35°+i\,\mathrm{sen}35°$
* $-\cos 50°+i\,\mathrm{sen}50°=-(\cos 50°-i\,\mathrm{sen}50°)=-[\cos(-50°)+i\,\mathrm{sen}(-50)]$

Luego: $f=\frac{2(\cos 60°+i\,\mathrm{sen}60°)]\,[8(\cos(-40°)+i\,\mathrm{sen}(-40°))]}{2[\sqrt{2}(\cos 35°+i\,\mathrm{sen}35°)]^2[-(\cos(-50°)+i\,\mathrm{sen}(-50°))]}$

Aplicamos MOIVRE y ordenamos: $f=\frac{[2(\cos 60°+i\,\mathrm{sen}60°)]\,[8(\cos(-40°)+i\,\mathrm{sen}(-40)]}{-2[2(\cos 70°+i\,\mathrm{sen}70°)]\,[\cos(-50°)+i\,\mathrm{sen}(-50°)]}$

$\therefore\ f=-4$

48. Sea $Z = a+bi / Z(-\overline{Z}) = -24 \;\wedge\; tg300° = \dfrac{b}{a}$ (datos)

Observación: $-\sqrt{3} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow b = -a\sqrt{3}$ .... (1)

Además: $(a+bi)(-a+bi) = -24 \Rightarrow +(a^2+b^2) = +24$ .... (2)

(1) en (2): $a^2 + 3a^2 = 24 \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{a=\sqrt{6}}}$ ó $-\sqrt{6}$

De (2): $6 + b^2 = 24 \Rightarrow b^2 = 18 \Rightarrow b = 3\sqrt{2}$ ó $-3\sqrt{2}$

Pero como Arg (Z) $\in$ IVC $\qquad a > 0 \;\wedge\; b < 0$

$\therefore\; Z = \sqrt{6} - 3\sqrt{2}i$

49. Por dato: $Z = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$

$\Rightarrow \overline{Z} = r(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)$ o también $\overline{Z} = r(\cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha))$

En la ecuación dada: $\left(\dfrac{r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)}{r(\cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha)}\right)^3 + \left(\dfrac{r(\cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha))}{r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)}\right)^3 = -2$

Por división: $(\cos2\alpha + i\operatorname{sen}2\alpha)^3 + (\cos(-2\alpha) + i\operatorname{sen}(-2\alpha))^3 = -2$

Por MOIVRE: $(\cos6\alpha + i\operatorname{sen}6\alpha) + (\cos(-6\alpha) + i\operatorname{sen}(-6\alpha)) = -2$

ó $\underline{\cos6\alpha} + \cancel{i\operatorname{sen}6\alpha} + \underline{\cos6\alpha} - \cancel{i\operatorname{sen}6\alpha} = -2 \Rightarrow \cos6\alpha = -1$

Aquí consideramos: $6\alpha = 180° \Rightarrow 2\alpha = 60°$

Nos piden: $tg\alpha + ctg\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \dfrac{2}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$

$\Rightarrow tg\alpha + ctg\alpha = \dfrac{2}{\operatorname{sen}2\alpha} \qquad \therefore\; tg\alpha + ctg\alpha = \dfrac{\frac{2}{1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

50. Sea: $Z = a+bi$, si Arg(Z)$\in$IVC (dato) $\Rightarrow a>0$ y $b<0$

Otro dato: $|Z| = 5 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 5 \Rightarrow a^2+b^2 = 25$ .... (1)

Además: $|Z-5| = 2\sqrt{5} \Rightarrow |a+bi-5| = |(a-5)+bi| = 2\sqrt{5}$

Observación: $\sqrt{(a-5)^2+b^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \underbrace{a^2 - 10a + 25 + b^2}_{} = 20$

$\Rightarrow 25 - 10a + 25 = 20 \Rightarrow a = 3$; en (1): $b^2 = 16 \Rightarrow b = -4 < 0$

Luego: $Z = 3-4i$, de aquí: $Z-4+3i = -1-i \Rightarrow (Z-4+3i)^{16} = (-1-i)^{16} = (1+i)^{16} = [(1+i)^4]^4$

$\therefore\; (Z-4+3i)^{16} = (-4)^4 = 256$

51. Sea el complejo buscado $Z / Z(1-\sqrt{3}i)^5 = 4cis\,\dfrac{2}{3}\pi$ (dato)

Observación:

$\circledast\; \boxed{(1-\sqrt{3}i)}$
- $\Rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2 \quad , \quad \theta\in IVC \Rightarrow \theta = 360° - \alpha$
- $\Rightarrow tg\alpha = \left|-\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow \theta = 300°$

$\Rightarrow (1-\sqrt{3}i)^5 = 2^5 cis1500° <> 32cis60°$ (descontamos $2K\pi$)

En el dato: $Z = \dfrac{4cis120°}{32cis60°} = \left(\dfrac{1}{8}\right)cis60° = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\Rightarrow Z = \dfrac{1}{16} + \dfrac{\sqrt{3}}{16}i \qquad \therefore\; Im(Z) = \dfrac{\sqrt{3}}{16}$

52. Planteamos: $(1-a)\sqrt{\sqrt{3}+i} + a(\sqrt{3}+i) = r(\cos30° + i\operatorname{sen}30°) = Z$

Forma exponencial de $Z = re^{\frac{\pi}{3}i} \Rightarrow r = ?$

De la igualdad: $(1-a)\sqrt{\sqrt{3}+i} + a(\sqrt{3}+i) = r\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) \Rightarrow (1-a)\sqrt{\sqrt{3}+i} = \dfrac{r}{2}(\sqrt{3}+i) - a(\sqrt{3}+i)$

$(1-a)\sqrt{\sqrt{3}+i} = (\sqrt{3}+i)\left(\dfrac{r}{2} - a\right)$ (lo elevamos al cuadrado)

$\Rightarrow (1-a)^2 = \sqrt{3}\left(\dfrac{r}{2} - a\right)^2 + \left(\dfrac{r}{2} - a\right)^2 i$ .... (1)

$\Rightarrow \left(\dfrac{r}{2} - a\right)^2 = 0 \Rightarrow r = 2a$

Reemplazando en (1): $(1-a)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow r = 2$

$\therefore$ Forma Exponencial de $Z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

53. Dato:

$\boxed{Z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}$
- $\Rightarrow Z^6 = \cos6\theta + i\operatorname{sen}6\theta$
- $\Rightarrow Z^{-6} = \cos6\theta - i\operatorname{sen}6\theta$

(Revise teoría)

Luego: $Z^6 + Z^{-6} = 2\cos6\theta$; pero por dato: $Z^6 + Z^{-6} = 1 \Rightarrow 2\cos6\theta = -1$

$\Rightarrow \cos6\theta = -\dfrac{1}{2}$, de aquí $6\theta\in$II ó IIIC (coseno es (-))

Pero como θ es máximo $\Rightarrow 6\theta \in IIIC \Rightarrow \cos6\theta = -\dfrac{1}{2} = \cos240°$

$6\theta = \dfrac{4}{3}\pi \qquad \therefore\; \theta = \dfrac{2}{9}\pi$

54. Observación: $Z_1 = \sqrt{3}(\cos 7\alpha + i\,\mathrm{sen}\,7\alpha)$ y $Z_2 = \sqrt{3}(\cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha)$

$$\Rightarrow Z_1 + Z_2 = \sqrt{3}[(\cos 7\alpha + \cos 3\alpha) + i(\mathrm{sen}\,7\alpha + \mathrm{sen}\,3\alpha)]$$

(visto en adición en forma polar)

$$Z_1 + Z_2 = \sqrt{3}[2(\cos 5\alpha \cos 2\alpha) + i(2\,\mathrm{sen}\,5\alpha \cos 2\alpha)]$$

$$Z_1 + Z_2 = 2\sqrt{3}\cos 2\alpha(\cos 5\alpha + i\,\mathrm{sen}\,5\alpha) \quad \text{(forma polar)}$$

Por dato: $0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ y $0 < 5\alpha < \frac{5}{4}\pi$

Con esto podemos afirmar: $|Z_1 + Z_2| = 2\sqrt{3}\cos 2\alpha$ y $\mathrm{Arg}(Z_1 + Z_2) = 5\alpha$

Luego:

I. Dice: $|Z_1 + Z_2| = 2\sqrt{3}\cos 5\alpha$ .... (F)

II. Dice: $\mathrm{Arg}(Z_1 + Z_2) = 2\alpha$ .... (F)

Además se observa: $(Z_2 \div Z_1) = \cos(-4\alpha) + i\,\mathrm{sen}(-4\alpha)$

"ojo", del dato: $-\pi < -4\alpha < 0$, osea -4α es negativo, pero el argumento debe ser no negativo; transformamos así: $Z_2 \div Z_1 = \cos(2\pi - 4\alpha) + i\,\mathrm{sen}(2\pi - 4\alpha)$; $(\pi < 2\pi - 4\alpha < 2\pi)$

De aquí observo: $\mathrm{Arg}(Z_2 \div Z_1) = 2\pi - 4\alpha \Rightarrow$ Proposición (III) es (V)

$\therefore$ FFV

55. Transformemos a forma polar los complejos dados:

⊛ $\boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$\rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \Rightarrow r = 1$ y $\theta \in IVC \Rightarrow \theta = 360° - \alpha$

$\rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow \theta = 300°$

⊛ $\boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$\rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \Rightarrow r = 1$ y $\theta \in IIC \Rightarrow \theta = 180° - \alpha$

$\rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow \theta = 120°$

Luego: $(\cos 300° + i\,\mathrm{sen}\,300°)^n = \cos 120° + i\,\mathrm{sen}\,120°$

$\Rightarrow \cos 300° n + i\,\mathrm{sen}\,300°.n = \cos 120° + i\,\mathrm{sen}\,120°$

Generalizando se puede escribir (adicionar # entero de vueltas):

$$\underline{\cos 300°.n} + \underline{i\,\mathrm{sen}\,300°.n} = \underline{\cos(120° + 2K\pi)} + \underline{i\,\mathrm{sen}(120° + 2K\pi)} \quad ; \quad (K \in \mathbb{Z})$$

$\Rightarrow$ Se debe cumplir: $300° . n = 120° + 360° . K \Rightarrow 5n = 2 + 6K$

Observamos: $n = 2\left(\frac{1+3K}{5}\right)$, pero "n" es máximo, de 4 cifras y menor que 3000 además (1+3K) debe ser $\overset{\circ}{5}$ para que "n" sea entero.

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1+3K}{5}\right) < 3000 \Rightarrow \frac{1+3K}{\overset{\circ}{5}} < 7500$$

$\Rightarrow (1+3K) = 7495$; 7490 ; 7485 ; ...

Observación: para que "n" sea máximo $\Rightarrow$ (1+3K) debe ser el mayor posible tal que "K" sea un entero $\Rightarrow$ $\underline{\underline{1+3K = 7495}}$ (Ojo: "K" es entero)

Luego: $n = 2\left(\frac{7495}{5}\right)$ $\quad \therefore n = 2998$

56. Transformamos "Z" teniendo en cuenta la trigonometría

$Z = \underline{\underline{1 - \cos 2\theta}} + i\,\underline{\mathrm{sen}\,2\theta} = 2\,\mathrm{sen}^2\theta + i \times 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$

$\Rightarrow Z = 2\,\mathrm{sen}\,\theta(\mathrm{sen}\,\theta + i\cos\theta)$; como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Su forma polar es: $Z = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$

Puesto que si $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ y $\cos = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, luego se observa:

$|Z| = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$; $\mathrm{Arg}(Z) = \frac{\pi}{2} - \theta$; $Z^2 = 4\,\mathrm{sen}^2\theta\, cis(\pi - 2\theta)$

"ojo" dice: <u>no es verdad que</u>: (marque V o F) $\quad \therefore$ Todas son falsas

57. Sea "Z" el cociente, transformemos la expresión dada así:

$$Z = \frac{(1+\cos\theta) + i\,\mathrm{sen}\,\theta}{(1-\cos\theta) + i\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} + i \times 2\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} + i \times 2\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \; ; \; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$Z = \frac{\cancel{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\left(\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)} = \mathrm{ctg}\frac{\theta}{2} \times \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

Por división de complejos (restamos argumentos): $Z = \mathrm{ctg}\frac{\theta}{2} \times cis\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

58. Sea: $Z = a + bi$ / a y b son positivos; $|Z| = 8$, además: $Z_1 = ni$ (datos)

Planteamos por dato: $Z \times Z_1 = 40 cis 300°$ .... (1)

De (1): $|Z \times Z_1| = 40 \Rightarrow |Z||Z_1| = 40 \Rightarrow |Z_1| = 5$

De aquí: $|ni| = 5 \Rightarrow \sqrt{n^2} = 5 \Rightarrow |n| = 5 \Rightarrow n = 5$ ó -5

* Si n=5 , en (1): $(a+bi)(5i)=40\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ⇒ $-5b+5ai=20-20\sqrt{3}\,i$ (de aquí a y b salen negativos, contradice al dato).

* Si n=−5 , en (1): $(a+bi)(-5i)=20-20\sqrt{3}\,i$ ⇒ $5b-5ai=20-20\sqrt{3}\,i$, $a=4\sqrt{3}$ ∧ $b=4$

$\therefore\ \mathbb{R}e(Z)+\mathbb{I}m(Z)+\mathbb{I}m(Z_1)=a+b+n=-1+4\sqrt{3}$

59. Suponemos que $\alpha = a+bi$ / $\sqrt{-5-12i}=a+bi$ (dato)

Elevamos al cuadrado: $-5-12i = (a^2+b^2)+2abi$ (complejos iguales)

De aquí:

$$\left.\begin{array}{l} a^2-b^2=-5 \Rightarrow a^2-b^2=-5 \\ 2ab=-12 \Rightarrow ab=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=2 \ \wedge\ b=-3 \\ \text{ó } a=-2 \ \wedge\ b=3 \end{array}$$

⇒ Sus raíces son: $(2-3i)$ y $(-2+3i)$ (cualquiera es α)

$\therefore\ [\mathbb{R}e(\alpha)]^2+[\mathbb{I}m(\alpha)]^2 = 4+9 = 13$

60. Llevemos a forma polar los complejos mostrados:

$1-i$: $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$; $\theta\in IVC \Rightarrow \theta=360^\circ-\alpha$

$\text{tg}\alpha=\left|\frac{-1}{1}\right|=1 \Rightarrow \alpha=45^\circ \Rightarrow \theta=315^\circ$

$\sqrt{3}+i$: $r=\sqrt{3+1}=2$; $\theta\in IC \Rightarrow \theta=\alpha$

$\text{tg}\alpha=\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha=30^\circ \Rightarrow \theta=30^\circ$

Luego: $$Z=\frac{\sqrt{2}(\cos315^\circ+i\,\text{sen}315^\circ)}{2(\cos30^\circ+i\,\text{sen}30^\circ)}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos285^\circ+i\,\text{sen}285^\circ)$$

Hallamos las raíces quintas de Z (fórmula): $$Z^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\cos\left(\frac{285^\circ+2k\pi}{5}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{285^\circ+2k\pi}{5}\right)\right]$$

K = 0, 1, 2, 3, 4

De aquí, para K=0 y 1 no aparece alternativa correcta.

Luego, para K=2, se tiene: $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\cos201^\circ+i\,\text{sen}201^\circ)$

Ojo: $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{2}}{2}} <> \frac{\sqrt[10]{512}}{2}$ $\therefore$ Una raíz quinta es: $\frac{\sqrt[10]{512}}{2}\,cis201^\circ$

(Demuestrelo)

61. Dividimos 24680 entre 3

$$\begin{array}{l|l} 24680 & 3 \\ \ \ 6 & 8226 \\ \ \ \ 8 & \\ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ 2 & \end{array}$$

⇒ $24680=\underbrace{3(8226)}_{\overset{\circ}{3}}+2$

$24680=\overset{\circ}{3}+2$

Luego: $\omega^{24680}=\omega^{\overset{\circ}{3}+2}$

$\therefore\ \omega^{24680}=\omega^2$

62. Que el exponente de ω se llame: M ⇒ M=123453210. Podríamos hacer lo mismo que el ejercicio interior (dividirlo por 3), pero, dígame ¿si el número tuviera 100 cifras?... Recordemos algo general, que nos serviría para estos casos:

> **Todo número es divisible por 3 ó múltiplo de 3 si al sumar todas las cifras de al sumar todas las cifras de dicho número se obtiene un número divisible por 3.**

Observación: M = 1234543210 ⇒ Suma de cifras de "M"=25 , pero 25 no es divisible por 3, entonces "M" no es múltiplo de 3, pero... si podemos expresarlo así:

$M=\underbrace{1234543209}_{\overset{\circ}{3}}+1$ ¿es correcto? ..

⇒ $M=\overset{\circ}{3}+1$

Luego tendremos: $\omega^M=\omega^{\overset{\circ}{3}+1}$ $\therefore\ \omega^M=\omega$

63. Al igual que el ejercicio 5, pero ahora exprese la base del exponente en función de $\overset{\circ}{3}$ y recuerde:

$\boxed{(\overset{\circ}{n}+K)^m=\overset{\circ}{n}+K^m}$; $m\in Z^+$

Observo en el ejercicio: $7^{8^{9^{10}}}=(6+1)^{8^{9^{10}}}=(\overset{\circ}{3}+1)^{8^{9^{10}}}=\overset{\circ}{3}+1^{8^{9^{10}}}=\overset{\circ}{3}+1$

Luego se tiene: $\omega^{7^{8^{9^{10}}}}=\omega^{\overset{\circ}{3}+1}=\omega$

64. Analicemos los exponentes para cada caso:

de (a): $-\overline{LUIS99}$ (por dato L, U, I, S son cifras pares $(+)_s$ ⇒ L=2 , U=4 , I=6 , S=8 , no interesa el orden)

Observación: Suma de cifras $(\overline{LUIS99})=38\neq\overset{\circ}{3}$; luego se pude escribir:

$-\overline{LUIS99}=\underbrace{-\overline{LUIS97}}_{\overset{\circ}{3}}-2=\overset{\circ}{3}-2$ ⇒ $\omega^{-\overline{LUIS99}}=\omega^{\overset{\circ}{3}-2}=\omega^{-2}$ $\therefore\ \omega^{-\overline{LUIS99}}=\omega$

De (b): tome en cuenta lo indicado en el ejercicio 5, parte (b)

Observación:

$5^{5^{5^5}}=(6-1)^{5^{5^5}}=(\overset{\circ}{3}-1)^{5^{5^5}}$; 5^{5^5} ⇒ # impar ⇒ $5^{5^{5^5}}=\overset{\circ}{3}-1^{5^{5^5}}=\overset{\circ}{3}-1$

Luego:

$$\omega^{-5^{5^{5}}} = \omega^{-(\overset{\circ}{3}-1)} = \omega^{\overset{\circ}{3}+1} \qquad \therefore\ \omega^{-5^{5^{5}}} = \omega$$

$\therefore$ (a) $\times$ (b) $= \omega^2$

65. * $\overline{1+\omega^{-1}} = \overline{1+\omega^2} = \overline{1} + \overline{\omega^2} = 1+\omega \quad \therefore\ \overline{1+\omega^{-1}} = 1+\omega$ .... (V)

* $|1+\omega| = |-\omega^2| = |\omega^2| = |\omega|$;

ojo: ω y ω^2 son complejos conjugados

$\Rightarrow$ ambos poseen el mismo módulo $\therefore\ |1+\omega| = |\omega|$ .... (V)

* $|1+\omega|^2 + |1-\omega|^2 = 2(|1|^2 + |\omega|^2)$, pero $|\omega| = 1$

$\therefore\ |1+\omega|^2 + |1-\omega|^2 = 4$ .... (V)

* $\overline{\overline{\omega}^2} = \overline{(\omega^2)^2} = \overline{\omega^4} = \overline{\omega} = \omega^2 = \omega^{-1} \quad \therefore\ \overline{\overline{\omega}^2} = \omega^{-1}$ .... (V)

$\therefore$ VVVV

66. Analícese los exponentes de "ω", llévese la base de cada uno de ellos a $\overset{\circ}{3}$ y luego aplique propiedades vistas en el ejercicio 5 y 6, así:

* $2^{2^{2^{2}}} = (\overset{\circ}{3}-1)^{2^{2^{2}}}$; $2^{2^{2}} = \#$ par $\Rightarrow 2^{2^{2^{2}}} = \overset{\circ}{3}+1$; * $3^{3^{3^{3}}} = \overset{\circ}{3}$

* $4^{4^{4^{4}}} = (\overset{\circ}{3}+1)^{4^{4^{4}}} \Rightarrow 4^{4^{4^{4}}} = \overset{\circ}{3}+1$; * $5^{5^{5^{5}}} = (\overset{\circ}{3}-1)^{5^{5^{5}}}$; $5^{5^{5}} = \#$ impar $\Rightarrow 5^{5^{5^{5}}} = \overset{\circ}{3}-1$

* $7^{8^{9^{10}}} = (\overset{\circ}{3}+1)^{8^{9^{10}}} \Rightarrow 7^{8^{9^{10}}} = \overset{\circ}{3}+1$; * $8^{9^{10^{11}}} = (\overset{\circ}{3}-1)^{9^{10^{11}}}$; $9^{10^{11}} = \#$ impar $\Rightarrow 8^{9^{10^{11}}} = \overset{\circ}{3}-1$

* $9^{10^{11^{12}}} = \overset{\circ}{3}$; * $10^{11^{12^{13}}} = (\overset{\circ}{3}+1)^{11^{12^{13}}} = \overset{\circ}{3}+1$

Luego: $$K = \frac{\omega^{\overset{\circ}{3}+1} + \omega^{\overset{\circ}{3}} + \omega^{\overset{\circ}{3}+1} + \omega^{\overset{\circ}{3}-1}}{\omega^{\overset{\circ}{3}+1} + \omega^{\overset{\circ}{3}-1} + \omega^{\overset{\circ}{3}} + \omega^{\overset{\circ}{3}+1}} = \frac{\omega + 1 + \omega + \omega^{-1}}{\omega + \omega^{-1} + 1 + \omega}$$

Sabemos que: $\omega^{-1} = \omega^2 \Rightarrow K = \dfrac{\omega + \overbrace{1 + \omega + \omega^2}}{\underbrace{\omega + \omega^2 + 1} + \omega} = \dfrac{\omega}{\omega} \Rightarrow K = 1$

$\therefore\ |K| = 1$

67. Efectuando:

$$L = \frac{\dfrac{\omega^2+\omega+\omega-1}{\cancel{(\omega-1)}(\omega+1)}}{\dfrac{\omega^2+\omega-\omega+1}{\cancel{(\omega-1)}(\omega+1)}} + \frac{2(\omega-1)}{\omega-1-\omega^2-\omega}, \quad \text{pero } \omega^2+\omega+1 = 0$$

$$L = \frac{-1+\omega-1}{-\omega} + \frac{2(\omega-1)}{\omega} = \frac{2-\omega}{\omega} + \frac{2\omega-2}{\omega} = \frac{\omega}{\omega} \qquad \therefore\ L = 1$$

68. Siendo 1, ω y ω^2 raíces cúbicas de 1 $\Rightarrow\ \overline{\omega} = \omega^2$; $\overline{\omega^2} = \omega$; $\omega^{-1} = \omega^2$

$\omega^{-2} = \omega$ y $1+\omega+\omega^2 = 0$; transformamos "f" :

$$f = \omega^{\overset{\circ}{3}+1} + \cfrac{1+\omega^{\overset{\circ}{3}+2}}{1+\cfrac{1+\omega}{1+\cfrac{1+\omega^2}{1+\boxed{\cfrac{1+\omega}{1+\omega^2}}}}} \qquad \frac{1+\omega}{1+\omega^2} = \frac{-\omega^2}{-\omega} = \omega$$

$$= \omega + \cfrac{1+\omega^2}{1+\cfrac{-\omega^2}{1+\boxed{\cfrac{-\omega}{1+\omega}}}} \qquad \frac{-\omega}{1+\omega} = -\omega^2$$

$$f = \omega + \cfrac{-\omega}{1+\cfrac{-\omega^2}{1+\omega^{-1}}} = \omega + \cfrac{-\omega}{1+\boxed{\cfrac{-\omega^2}{1+\omega^2}}} \qquad \frac{-\omega^2}{1+\omega^2} = -\omega$$

$$= \omega + \frac{-\omega}{1+\omega} = \omega + \frac{-\omega}{-\omega^2}$$

$\Rightarrow f = \omega + \omega^{-1} = \omega + \omega^2 \qquad \therefore\ f = -1$

69. Observación: $\overline{\omega}^2 = \overline{\omega^2} = \omega$; $\overline{\omega-1} = \overline{\omega} - 1 = \omega^2 - 1$; $\overline{\omega} = \omega^2$

Luego: $$K = \frac{\omega(\omega-1)^2}{-(\omega^2-1)} + \frac{3(\omega+1)}{(\omega^2+\omega)(1-\overline{\omega})}$$

$$\Rightarrow K = \frac{\omega(\omega-1)^{\cancel{2}}}{-(\omega+1)\cancel{(\omega-1)}} + \frac{3(\omega+1)}{(\omega^2+\omega)(1-\overline{\omega})} = \frac{\omega(\omega-1)}{\omega^2} + \frac{3\cancel{(\omega+1)}}{(-1)\cancel{(1+\omega)}(1-\omega)}$$

$$\Rightarrow K = \frac{\omega-1}{\omega} + \frac{3}{\omega-1} = \frac{(\omega-1)^2+3\omega}{\omega(\omega-1)} = \frac{\omega^2+\omega+1}{\omega(\omega-1)} = \frac{0}{\omega(\omega-1)}$$

$\therefore\ K = 0$

70. Llamemos "L" a la expresión pedida:

$$L = \omega^{\omega^{-1} \times i^2 \times \omega^{-3} \times i^4 \times \omega^{-5} \times i^6 \ldots\ldots\ldots i^{52} \times \omega^{-53}}$$

$$L = \omega^{\omega^{\boxed{-1-3-5\ldots\ldots-53}} \times i^{\boxed{2+4+6+\ldots\ldots+52}}}$$

Observación:

* $\underbrace{1+3+5+\ldots\ldots+53}_{27 \text{ términos}} = 27^2 = 729$

* $\underbrace{2+4+6+\ldots\ldots+52}_{26 \text{ términos}} = 26(27) = 702$

Luego: $L = \omega^{\omega^{\boxed{-729}} \times i^{\boxed{702}}}$, observación: $-729 = \overset{\circ}{3}$; $702 = \underline{700} + 2 = \overset{\circ}{4} + 2$

$\Rightarrow L = \omega^{\omega^{\overset{\circ}{3}} \times i^{\overset{\circ}{4}+2}} = \omega^{1 \times i^2} = \omega^{-1} \qquad \therefore\ L = \omega^2$

71. Transformando: $E = \dfrac{(-\omega^2)^{202} + (-\omega)^{201}}{(-\omega)^{202} - (-\omega^2)^{201}}$

$$E = \frac{\omega^{404} - \omega^{201}}{\omega^{202} + \omega^{402}} = \frac{\omega^{\overset{\circ}{3}+2} - \omega^{\overset{\circ}{3}}}{\omega^{\overset{\circ}{3}+1} + \omega^{\overset{\circ}{3}}} = \frac{\omega^2 - 1}{\omega + 1} = \frac{\cancel{(\omega+1)}(\omega-1)}{\cancel{(\omega+1)}}$$

$\Rightarrow$ $E = \omega - 1$; de aquí, sea $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ó $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Observación: $\omega - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ó $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore$ $|E| = |\omega - 1| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

72. Observación: $a + b + c = 5 + 5\omega + 5\omega^2 = 5(1+\omega+\omega^2) \Rightarrow a + b + c = 0$

Por productos notables: $(ab+bc+ac)^2 = a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc\underbrace{(a+b+c)}_{0}$

$\Rightarrow$ $(ab+bc+ac)^2 = a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$

Luego: $L = (ab+bc+ac)^2$; de aquí: $L = [a(b+c)+bc]^2$

Reemplazando valores: $L = [5(5\omega+5\omega^2)+(3\omega^2+2\omega)(3\omega+2\omega^2)]^2$

$$L = [25\underbrace{(\omega+\omega^2)}_{(-1)} + (\underline{9\omega^3} + \underbrace{6\omega^4 + 6\omega^2}_{6(\omega+\omega^2)} + \underline{4\omega^3})]^2$$

Nos va a quedar: $L = [-25+13+6(-1)]^2$ $\therefore$ $L=324$

73. Sea $z = x + yi$ $\Rightarrow$ $z-5 = (x-5)+yi$ $\Rightarrow$ $|z-5| = \sqrt{(x-5)^2+y^2}$

Luego decimos : $\sqrt{(x-5)^2+y^2} = 4$ (por dato)

O también: $(x-5)^2 + y^2 = 4^2$ (Ecuación de una circunferencia)

$\therefore$ Su gráfica es una circunferencia con centro en (5,0) y un radio igual a 4u

74. Observación: los paréntesis son cocientes notables cuyas transformaciones son:

* $\omega^{26} + \omega^{24} + \omega^{22} + ... + \omega^2 + 1 = \dfrac{\omega^{28} - 1}{\omega^2 - 1}$

* $\omega^{238} - .... - \omega^{21} + \omega^{14} - \omega^7 + 1 = \dfrac{\omega^{245} + 1}{\omega^7 + 1}$

Sea "G" la multiplicación de los paréntesis, entonces se tiene:

$$G = \frac{\omega^{28} - 1}{\omega^2 - 1} \times \frac{\omega^{254} + 1}{\omega^7 + 1} = \frac{\cancel{\omega - 1}}{(\omega+1)\cancel{(\omega-1)}} \times \frac{\omega^2 + 1}{\omega + 1} = \frac{\omega^2 + 1}{(\omega + 1)^2} = \frac{-\omega}{(-\omega^2)^2}$$

$\Rightarrow$ $G = \dfrac{-\omega}{\omega^4} = \dfrac{-\omega}{\omega}$ $\therefore$ $G=-1$

75. Sumamos x , y , z: $x+y+z = m\underbrace{(1+\omega+\omega^2)}_{0} + n\underbrace{(1+\omega^2+\omega)}_{0}$

De aquí: $x + y + z = 0$ $\Rightarrow$ Podemos decir que: $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$

(Productos Notables)

Luego: $M=3xyz$; reemplazando: $M=3(m+n)(m\omega+n\omega^2)(m\omega^2+n\omega)$

$\Rightarrow$ $M = 3(m+n)(m^2\omega^3+mn\omega^2+mn\omega^4+n^2\omega^3)$

$$M=3(m+n)(m^2 + \underbrace{mn\omega^2 + mn\omega}_{mn(\omega^2+\omega)} + n^2)=3(m+n)[m^2 + mn\underbrace{(\omega^2+\omega)}_{(-1)} + n^2]$$

Observación: $M = 3(m+n)(m^2-mn+n^2)$ $\Rightarrow$ $M = 3(m^3+n^3)$

Pongamos los valores de "m" y "n" dados, en M, así:

$M = 3[(cis10°)^3+(cis20°)^3]$ (aplicamos MOIVRE)

$\Rightarrow$ $M = 3[(\cos30° + i\,\mathrm{sen}30°)+(\cos60° + i\,\mathrm{sen}60°)]$

$$M=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow M = \underbrace{3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{a} + \underbrace{3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{b} i$$

Supongamos que $Arg(M) = \theta = ?$

Como: a y b son positivos $\Rightarrow$ $Arg(M) = \theta \in IC$, además $a=b$

$\Rightarrow$ $tg\theta = \dfrac{b}{a} = 1$ $\therefore$ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

76. Nos piden: $S = 1 + 2\omega + 3\omega^2 + 4\omega^3 + ... + 2001\omega^{2000}$

Multiplicamos por "ω" a ambos miembros: $\omega S = \omega + 2\omega^2 + 3\omega^3 + ... + 2000\omega^{2000} + 2001\omega^{2001}$

Restamos las 2 igualdades, miembro a miembro y se tiene:

$$S - \omega S = \underbrace{1+\omega+\omega^2}_{0} + \underbrace{\omega^3+\omega^4+}_{0}\underbrace{.............+\omega^{2000}}_{0} - 2001\omega^{2001}$$

Observación: La suma de 3 potencias consecutivas de ω es cero.

$\Rightarrow$ Nos queda: $S-\omega S=-2001\omega^{2001}=-2001\omega^3$

$\Rightarrow$ $S(1-\omega)=-2001$ $\therefore$ $S = \dfrac{2001}{\omega - 1}$

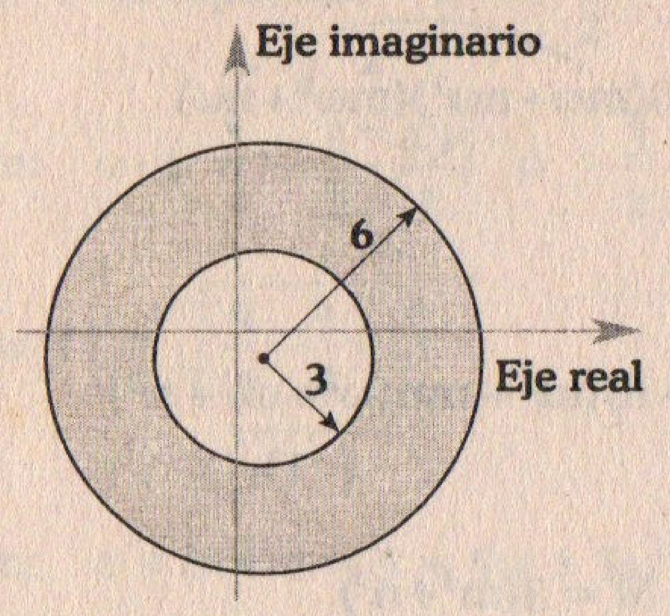
77. Sea el complejo $z = x + yi$ $\Rightarrow$ $z-1+i = (x-1)+(y+1)i$

Donde: $|z-1+yi| = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$

Por dato : $3 \le \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} \le 6$

$\Rightarrow 3^2 \le (x-1)^2+(y+1)^2 \le 6^2$, la gráfica de esta desigualdad es una corona circular, determinada por dos circunferencias concéntricas de radios 3u y 6u, con centros en (1;−1).

De aquí: Área sombreada es el área pedida.



$\Rightarrow$ $A_s = A\odot_{MAYOR} - A\odot_{MENOR}$

$A_s = \pi(6)^2 - \pi(3)^2$

$\therefore A_s = 27\pi u^2$

78. Si $z = x + yi \Rightarrow z + 3 = (x+3) + yi$, de aquí, si "θ" es el argumento de (z+3)

$\Rightarrow \text{tg}\theta = \dfrac{y}{x+3}$, pero $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ (dato), luego decimos: $\text{tg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{y}{x+3} \Rightarrow 1 = \dfrac{y}{x+3} \quad \therefore \; y = x+3$

79. Si $z = x + yi \Rightarrow z - 1 = (x-1) + yi \quad \wedge \quad z - i = x + (y-1)i$

$$\Rightarrow \frac{z-1}{z-i} = \frac{(x-1)+yi}{x+(y-1)i} \times \frac{x-(y-1)i}{x-(y-1)i} = \frac{x(x-1)+y(y-1)+[xy-(x-1)(y-1)]i}{x^2+(y-1)^2}$$

De aquí: $$\frac{z-1}{z-i} = \underbrace{\left(\frac{x^2-x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}\right)}_{a} + \underbrace{\left(\frac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2}\right)}_{b} i$$

Luego decimos: si "θ" es el argumento de $\dfrac{z-1}{z-i} \Rightarrow \text{tg}\theta = \dfrac{b}{a}$

Pero como $\theta = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \text{tg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow 1 = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \underline{b = a}$

Poniendo sus valores, se tiene: $\dfrac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2} = \dfrac{x^2-x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} \Rightarrow x+y-1 = x^2-x+y^2-y$

$\Rightarrow x^2-2x+y^2-2y = -1 \Rightarrow \underline{x^2-2x+1} + \underline{y^2-2x+1} = \underline{-1+2}$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = 1$ (Ecuación de una circunferencia)

$\therefore$ Centro de la circunferencia = (1;1)

80. Hallemos los afijos de Z. Son datos Z y Z^{-1} ; sabemos por teoría que:

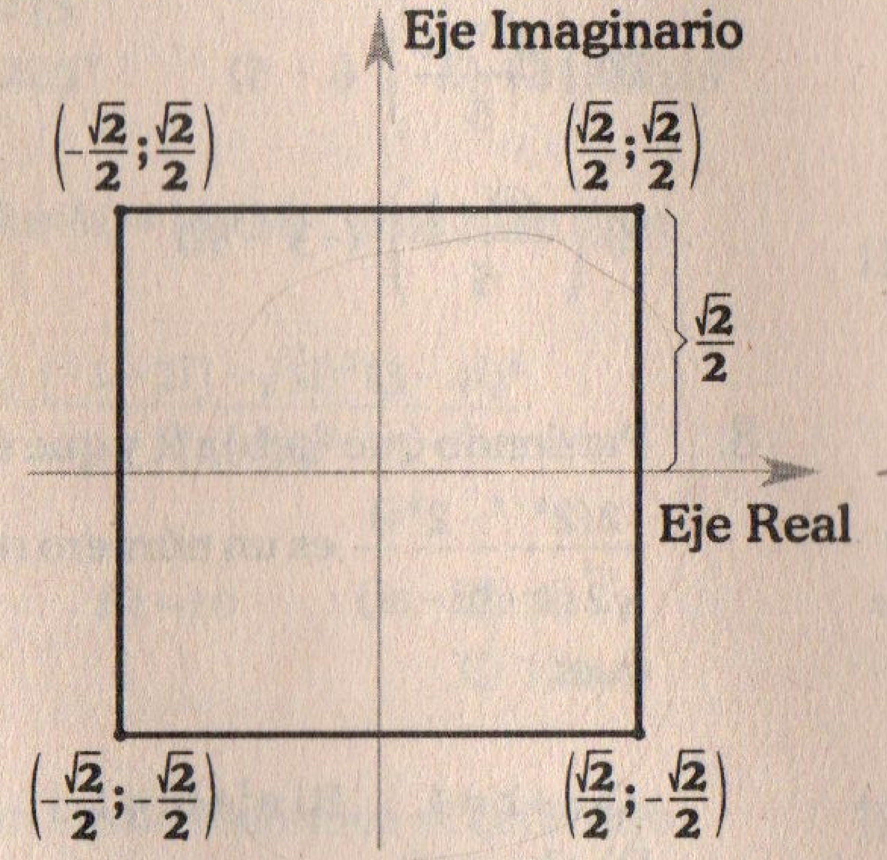
$Z.Z^{-1} = (1;0) \Rightarrow (x;y).\left(\dfrac{1}{2x};-y\right) = (1;0)$

Efectuando: $\left(\dfrac{1}{2}+y^2;-xy+\dfrac{y}{2x}\right) = (1;0)$

Por igualdad: $* \; \dfrac{1}{2}+y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$* \; -xy+\dfrac{y}{2x} = 0 \Rightarrow \dfrac{y}{2x} = xy \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Según la combinación de signos, existen 4 complejos, dando lugar a 4 afijos, cuya gráfica será:



Observación:

Al unir los afijos, se genera un cuadrado de lado igual a $\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Área□ $= \ell^2 = (\sqrt{2})^2$

$\therefore$ Área□ $= 2u^2$

Problemas Propuestos

1. Determine el valor de:

$$i^{1\underline{|1}+2\underline{|2}+3\underline{|3}+\,....\,+1999\underline{|1999}}$$

A) $-i$ B) i C) 1
D) -1 E) 0

2. Calcular:

$$\sum_{m=1}^{4} i^{K}\ , \text{ para } K=\underbrace{\overline{mmm......m}}_{\text{n cifras}}$$

A) 0 B) $-2i$ C) $(1+i)^2$
D) 2 E) -1

3. Halle la suma de:
$(2^3+i^{-1})+(4^3+i^{-2})+(6^3+i^{-3})+....+[8n^3+i^{-n}]$
Sabiendo que $n=\overset{\circ}{4}$ (múltiplo de 4)

A) $4n^2(n+1)^2$ B) $2^n(n+1)^2$ C) $2n(n+1)^2$
D) $n^2(n+1)^2$ E) $2n^2(n+1)^2$

4. Evaluar: $\mathbb{I}m\left(\frac{-3+2i}{1+i}\right)+\mathbb{I}m\left(\frac{4-i}{1+i}\right)$

A) 0 B) 1 C) $1+i$
D) $1-i$ E) $2i$

5. Siendo x, y, z números complejos con $x+y+z\neq 0$

$$¿\mathrm{Re}\left(\frac{x}{x+y+z}\right)+\mathrm{Re}\left(\frac{y}{x+y+z}\right)+\mathrm{Re}\left(\frac{z}{x+y+z}\right)=1?$$

A) Sí B) No C) Hay veces
D) Faltan datos E) Absurdo

6. Calcule el menor "n de cuatro cifras para que el argumento de:

$Z=\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-5}}$, pertenezca al IC. $(n\in Z^+)$

A) 1004 B) 1005 C) 1006
D) 1003 E) 1009

7. Reduzca:
$S=(1+i)+(1-i)^2+(1+i)^3+(1-i)^4+...+(1-i)^{100}$

A) $\left(\frac{4^{25}-1}{5}\right)(i+3)$

B) $\left(\frac{4^{25}+1}{5}\right)(i-5)$

C) $\left(\frac{4^{25}+1}{5}\right)(i+5)$

D) $\left(\frac{4^{25}-1}{5}\right)(i-5)$

E) $\left(\frac{4^{25}+1}{5}\right)(-3-5i)$

8. Partiendo que $\{a;b\}\subset\mathbb{R}$ y que el cociente de: $\frac{2(2^{a-1}-2^{b}i)}{\sqrt{2}(1+bi-ai)}$ es un número real, se cumple que:

A) $a+b=1$ B) $a^2+b^2=1$ C) $a-b=1$
D) $ab=a+b$ E) $a-b=2$

9. Dado: $H(x)=\frac{ax-3}{x-3}$, $x\neq 3$; calcule "a" $\in\mathbb{R}$ para que $H[H(i)]$ sea un número imaginario puro, siendo "i" la unidad imaginaria.

A) 3 B) 2 C) 1
D) -1 E) -2

10. Al simplificar abreviadamente en:

$$(256)^4(1-2\sqrt{2}i)^2\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}\right)^{15}\left(\frac{\sqrt[19]{3}-\sqrt[19]{3}i}{2}\right)^{38}\left(\frac{1-\sqrt{2}i}{2}\right)^{19}$$

Se obtiene:

A) 1,5 B) $(1,5)^{21}$ C) 2,5
D) $(2,5)^{21}$ E) 1

11. Determinar la suma de los cuadrados de los componentes de un número complejo cuyo opuesto de su conjugado, multiplicado por el conjugado de su opuesto de $(1+i)$, nos dé como resultado $-\left(\frac{390}{-9+7i}\right)$

A) 885 B) 985 C) 685
D) 700 E) 585

12. Exprese en forma polar la simplificación:

$G=\frac{-2[P(1+i)]^{|P(1+i)|}}{(1+i)(1+2i)(1+3i)}$, si $P(x)=3x^2-2x-1$

A) $625cis75°$ B) $625cis275°$
C) $125cis275°$
D) $625cis225°$ E) $125cis225°$

13. Indique: $\mathrm{Re}(M)+\mathbb{I}m(M)$, si se sabe que:

$$M=\frac{(-|-1+2i|+\sqrt{5}i)^2(3-4i)^5}{(4+3i)^4}$$

A) 10 B) -10 C) 70
D) -70 E) 120

14. Muestre en forma binómica el complejo:

$K=9\frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^6}-12\frac{(1-i)^{23}}{(1+i)^{19}}$, señale su módulo

A) 72 B) 4 C) 24
D) 60 E) 84

15. ¿Cuántos números complejos de componentes enteras satisfacen las igualdades: $Z^3+\overline{Z}^3=-4$ y $(Z.\overline{Z})^3=8$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

16. 3 números complejos están relacionados así: $(a+bi)(c+di)=m+ni$
Si el módulo del producto y el multiplicador son respectivamente β y α, calcule el equivalente de:
$L=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

A) $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ B) $\frac{\beta^4}{\alpha^2}$ C) $\frac{\alpha^4}{\beta^2}$

D) $\frac{\alpha^2}{\beta}$ E) β^2

17. Señale la forma polar del complejo:

$L=\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}-\frac{(1-i)^{10}+1}{(1+i)^{10}-1}$

A) $\frac{6}{5}cis207°$ B) $\frac{6}{5}cis307°$ C) $\frac{6}{5}cis53°$

D) $\frac{6}{5}cis300°$ E) $\frac{8}{5}cis307°$

18. Siendo: $Z_1=(\sqrt{2}cis15°)^2$ y
$Z_2=(\sqrt[3]{3}cis20°)^3$, señale $|Z_1+Z_2|$

A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ B) $1+6\sqrt{3}$ C) $13-\sqrt{3}$
D) $13+6\sqrt{3}$ E) $\sqrt{13+6\sqrt{3}}$

19. El equivalente reducido de:

$L=\prod_{n=1}^{K}[n+(-1)^n ni]$ para $K=\overset{\circ}{8}$, es:

A) $16\underline{|K}$ B) $16^K\underline{|m}$
C) $m^n\underline{|K}$; $K\in\mathbb{Z}$
D) $16^n\underline{|m}$ E) $16^m\underline{|K}$; $m\in\mathbb{Z}^+$

20. Si los módulos de los números complejos $Z_1=(a;b)$ y $Z_2=(c;d)$ son números enteros, tal que: $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=45$
Calcule la mayor suma que puede tomar la suma de los cuadrados de todas sus componentes.

A) 0 B) 12 C) 25
D) 46 E) 60

21. Evaluar: $P=|1+z\overline{\omega}|^2-|\overline{z}+\overline{\omega}|^2$; z y $\omega\in\mathbb{C}$, si $|z|=1 \;\wedge\; |\omega|=1$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 6

22. El producto de dos números complejos de componentes enteros, pertenecientes al III y IV cuadrante es –6–Mi. Si el cociente de dividirlos es un imaginario puro, calcular "M".

A) –4 B) –2 C) 1
D) 0 E) 2

23. Señale el módulo del complejo mostrado:

$$Z=\frac{\sqrt[20]{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}.(\sqrt{5}-\sqrt{5}i)^2.\sqrt{1+i}.(25i)}{\sqrt{\sqrt[10]{128}\;(-3-4i)^4}}$$

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

24. Si $|Z|=7$, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar $|Z-7|$?

A) 7 B) 14 C) 16
D) 18 E) 21

25. Aplicando propiedades y sabiendo que: $|Z|=|\omega|=1$, halle el V.N. de: $E=\left|\dfrac{Z-\omega}{1-\overline{Z}\omega}\right|$

A) 3 B) 4 C) 2
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

26. Se tiene un complejo de componentes enteros y módulo $\sqrt{106}$ y del cuarto cuadrante. Determinar el área de la superficie generada al unir los afijos del complejo, de su conjugado y el origen del plano complejo.

A) $4u^2$ B) $45u^2$ C) $410u^2$
D) $16u^2$ E) $420u^2$

27. Calcule un valor de:

$$E=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{-1+\sqrt{3}i}}+\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{-1-\sqrt{3}i}}$$

A) 0 B) 1 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

28. Verificándose que: $\dfrac{2\sqrt{24-7i}}{2\sqrt{2}-\sqrt{2i}}=a+bi$, calcule abreviadamente un valor de ab

A) 3 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) –4 E) –5

29. Z y $\omega\in\mathbb{C}$ / $|-\omega|=\sqrt{2}$ y $|\overline{Z}|=\sqrt{3}$
$\Rightarrow |\omega+\overline{Z}|^2+|\omega-\overline{Z}|^2=?$

A) 10 B) 30 C) 16
D) 60 E) 12

30. Indique módulo y argumento del complejo "Z" que satisface la igualdad:

$$\frac{4Z}{1+i^{-1}}+\frac{Z}{i}=\frac{10}{1+i}$$

A) $\sqrt{10}$; arg tg(–1)
B) $\sqrt{2}$; arg tg(–2)
C) $\sqrt{10}$; $\frac{\pi}{8}$
D) $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{5}$
E) $\sqrt{10}$; arg tg(–3)

31. ¿Para qué valor de "n" se verifica que:

$$\frac{32\,(\sqrt[8]{2}cis\,45°)^4(sen41°+icos41°)^5}{[\sqrt{2}(cos20°-isen20°]^3(-cos55°+isen55°)}=\frac{(1-i)^n}{cis(-60)}$$

Indique por respuesta: n^2+n+1

A) 71 B) 72 C) 73
D) 74 E) –72

32. Calcúlese el recíproco del complejo:

$$M=\frac{\dfrac{(cos2x-isen2x)^3(cisy)^2}{cis(x+y)}}{\dfrac{(cis2x)^3(cosy-iseny)^2}{cos(x+y)-isen(x+y)}}\;;\text{ si: } 8y-56x=\pi$$

A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i$ E) $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

33. La suma de los módulos de un dígito de dos números complejos es igual a 18, el argumento de su cociente de uno de ellos entre el conjugado del otro es $\frac{\pi}{2}$.

Calcular el cubo de uno de ellos, si se sabe que el argumento de producto de uno de ellos por el cuadrado del otro es $\frac{2}{3}\pi$.

A) –243 B) –729 C) –27
D) –790 E) –2187

34. Siendo: $Z\in\mathbb{C}/|Z|=1$ y $Z^5-Z^{-5}=\sqrt{2}i$; con $\frac{\pi}{18}<arg(Z)<\pi$, determine arg(Z).

A) 21° B) 45° C) 81°
D) 63° E) 44°

35. Indique el argumento de $M=(K-1)K(K+1)$, si se sabe que $K=cis\alpha$ y además $0<2\alpha<\pi$

A) $\frac{\pi+5\alpha}{2}$ B) $\frac{\pi-5\alpha}{2}$ C) $\frac{\pi+4\alpha}{2}$
D) $\frac{\pi-4\alpha}{2}$ E) $\frac{\pi+4\alpha}{4}$

36. Siendo: $Z=x+yi$, donde $\{x;y\}\subset\mathbb{R}$, el lugar geométrico definido por todos los Z, tal que: $\left|\dfrac{Z+3}{Z-3i}\right|=\sqrt{3}$ es una circunferencia de centro igual a .... y cuyo radio es .....

A) $\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right);\sqrt{6}$ B) $(1;2)$; $\frac{\sqrt{6}}{2}$
C) $(3;9)$; $3\sqrt{6}$
D) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right);\frac{3\sqrt{6}}{2}$

37. Calcular: $\omega^{\overline{aaabbbccc98}}$, si "ω" es una raíz cúbica de 1 pero diferente de $1/\mathbb{I}m(\omega)<0$

A) 1 B) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ C) $-\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}i$

38. Siendo 1, ω y ω^2 raíces cúbicas de la unidad e "i" la unidad imaginaria; verifique como verdadera (V) o falsa (F) las proposiciones siguientes:

I. $|1+\omega^2|=|1+\omega|$
II. $|\omega-i|=|\omega^2+1|$
III. $|\omega i|=1$
IV. $1+\overline{\omega}+\overline{\omega}^2=0$

A) VFVV B) VFFF C) VFFV
D) FFFF E) VVVV

39. Simplifique abreviadamente:

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{4}\right)^{16}+\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{4}\right)^{16}$$

A) 1 B) 2^4 C) 4^{-16}
D) 2^{16} E) -4^{-8}

40. Compute el módulo de:

$$G=\frac{\overline{\omega^2}-1}{-\omega^2-1}+\frac{1}{\omega(\omega+1)(1-\overline{\omega})}$$

Donde $\omega=\sqrt[3]{1}$, pero $\omega\neq 1$

A) $\sqrt{2{,}3}$ B) $\sqrt{1{,}\widehat{3}}$ C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{2{,}\widehat{3}}$ E) $2{,}\widehat{3}$

41. Sumar: $f=\dfrac{\overline{\omega}}{2\omega+1}+\dfrac{\overline{\omega^2}}{2\omega^2+1}/\omega=\sqrt[3]{1},(\omega\neq 1)$

A) 1 B) 2 C) 3
D) ω E) ω^2

42. Determine el resultado de:

$$P=\omega^{i}+\omega^{i^2}-\omega^{2i^3}+\omega^{i^4}+\omega^{i^5}+\omega^{i^6}-\omega^{2i^7}+\omega^{i^8}+\dots$$

Sabiendo que "P" posee 120 términos. Además 1, ω y ω^2 son raíces cúbicas de 1 e "i" es la unidad imaginaria.

A) -120 B) -40 C) -60
D) -30 E) -20

43. Compute el equivalente reducido de:

$$\left(\frac{2+3\omega}{1-2\omega}\right)^{-1}+\left(\frac{3+4\omega}{1-3\omega}\right)^{-2}+\left(\frac{4+5\omega}{1-4\omega}\right)^{-3}+\dots..$$

$$\dots..+\left(\frac{63+64\omega}{1-63\omega}\right)^{-62}$$

Sabiendo que 1, ω y ω^2 son raíces cúbicas de 1.

A) -1 B) 1 C) ω
D) ω^2 E) 62

44. Siendo 1, ω y ω^2, raíces cúbicas de 1, donde: $\omega=\dfrac{b-bc+c}{bc}$, determine el valor numérico de:

$$L=\frac{x+b+c}{\omega x-bc}+\frac{x+bc+c\omega}{\omega^2x-b}+\frac{x-b\omega-c\omega}{x+bc}$$

A) 0 B) 1 C) -3
D) 3ω E) ω

45. Si: 1, ω y ω^2 son raíces cúbicas de la unidad, evalué:

$$f=\frac{x}{\omega(x+z\omega)+y}+\frac{y}{\omega(y+x\omega)+z}+\frac{z}{\omega(z+y\omega)+x}$$

A) 1 B) ω C) ω^2
D) 3 E) $3\omega^2$

46. El módulo de:

$S=i+2i^2+3i^3+\dots+51\,i^{51}$

A) 13 B) 0 C) 26
D) 12 E) $26\sqrt{2}$

47. ¿De qué forma es "n" para que la suma de:

$$\frac{C_0^{n-1}\omega}{1}+\frac{C_1^{n-1}\omega^2}{2}+\frac{C_2^{n-1}\omega^3}{3}+\dots+\frac{C_{n-1}^{n-1}\omega^n}{n}$$

sea nula? ; además $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

A) $n=8k$, $k\in\mathbb{Z}$ B) $n=3k$
C) $n=3k$, $k\in\mathbb{Z}$
D) $n=k$, $k\in\mathbb{Z}^+$ E) $n=6k$, $k\in\mathbb{Z}^+$

48. Si se sabe que x, y, z son números reales, resuelva el sistema mostrado:

$(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z=3+8i$ ..... (1)
$(2-i)x+(3-i)y+(5-i)z=14-3i$ .... (2)

Indique su conjunto solución.

A) $\{(1;4;-3)\}$ B) $\{(1;-1;3)\}$ C) $\{(-1;2;3)\}$
D) $\{(1;-1;2)\}$ E) $\{(2;-1;-1)\}$

49. Siendo $Z=x+yi$, hallar la ecuación del lugar geométrico definido por: $\arg(Z^2+1)=\dfrac{\pi}{6}$

A) $x^2-2\sqrt{3}xy+y^2+1=0$
B) $x^2-2\sqrt{3}xy-y^2-1=0$
C) $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2+1=0$
D) $x^2+2\sqrt{3}xy+y^2+1=0$
E) $x^2-2\sqrt{3}xy-y^2+1=0$

50. Halle un valor de: $(-1)^i$

A) e^{π} B) $e^{-2\pi}$ C) $\dfrac{e}{2}$
D) $e^{-\pi}$ E) $e^{-\frac{\pi}{2}}$

51. "i" es la unidad imaginaria, además, 1, ω y ω^2 son raíces cúbicas de uno, según esto, calcular la potencia de:

$$\left[\dots\dots\left(\left[(i\omega^2)^{i^2\omega^3}\right]^{i^3\omega^4}\right)^{i^4\omega^5}\dots\dots\right]^{i^{53}\omega^{54}};\ \mathbb{I}_m(\omega^2)>0$$

A) $e^{\frac{\pi}{6}i}$ B) $e^{\frac{7\pi}{6}i}$ C) $e^{\frac{4\pi}{3}i}$
D) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$ E) i

52. Si "K" es la suma de todos los posibles valores que puede tomar: $i^{n2^{n^2}}$, calcule K^{16} $(n\in\mathbb{N})$

A) 1 B) 2i C) 256
D) 64 E) 16

53. Si $Z_1=1-i$, $Z_2=1-2i$ y $Z_3=1-3i$, señale el módulo de:

$$P=\frac{\overline{Z}_1^{\,4}+\overline{Z}_2^{\,3}+\overline{Z}_3^{\,4}+1}{\overline{Z_1.Z_2.Z_3}-\overline{Z_2^3-5i}}$$

A) 1 B) $\sqrt{14}$ C) $\dfrac{1}{7}$
D) $14\sqrt{5}$ E) 2

54. ¿Cuál es el número complejo $Z(\mathbb{R}e(Z)<\mathbb{I}m(Z))$, ubicado en el III cuadrante, que al dividirlo por $(1+i)^2$ da otro complejo cuyo módulo es 3 y que el producto de sus componentes sea $-2\sqrt{5}$?

A) $-4-\sqrt{5}$ B) $-2\sqrt{5}-4i$ C) $-\sqrt{5}-4$
D) $-3\sqrt{5}-2$ E) No existe

55. Se tiene el número complejo $Z=a+bi$, a éste se le halla su conjugado, a lo obtenido su opuesto, luego su recíproco, ahora se le multiplica por la unidad imaginaria, a lo que se obtiene se le eleva al cuadrado y por último a éste se le multiplica por su conjugado; señale el inverso de lo obtenido.

A) $|Z|^4$ B) $|Z|^3$ C) $|Z|^2$
D) $|Z|$ E) Z

56. Indique en qué cuadrante se halla el complejo $Z=\left(\dfrac{x}{2};\dfrac{y}{2}\right)$ diferente de cero, tal que $Z^{-2}=(x;y)$

A) IIC B) Sólo IC C) IVC
D) I ó IVC E) IIIC

57. La suma de:

$$\frac{5-10i}{1+2i}+\frac{26-39i}{2+3i}+\frac{75-100i}{3+4i}+\ldots\ldots$$

40 sumandos, dá como resultado un complejo (a+bi), calculese "b".

A) –22140 B) –22960 C) 22140
D) 45960 E) –45920

58. Indique $\mathrm{Re}(Z)+\mathrm{Im}(Z)$, si:

$$Z=\underbrace{\frac{5+5i}{1+2i}+\frac{10+20i}{1+3i}+\frac{17+51i}{1+4i}+\frac{26+104i}{1+5i}+\ldots}_{\text{"n" sumandos}}$$

A) $\dfrac{n(n^2+3n+8)}{3}$

B) $\dfrac{n+(n+1)(n+5)}{3}$

C) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

D) $(n+2)(n+1)n$

E) $\dfrac{n(n^2+5)}{3}$

59. Si $(z+w)^2=8$. Hallar el área formada por z, w y el origen del plano complejo, si $z=\overline{w}$, $z\in\mathbb{C} \wedge \mathrm{I_m}\left(\overline{\overline{\overline{w}}}\right)=-\sqrt{2}$

A) 2 B) 3 C) –3
D) –2 E) $\frac{1}{3}$

60. Se define el operador cuadrado así: $\boxed{x}=\dfrac{xi+1}{2-xi}$ donde "i" es la unidad imaginaria, señale el mayor valor de x, si se sabe que el módulo de $\boxed{x}$ es igual a 1.

A) 1 B) $2+\sqrt{5}$ C) $3+\sqrt{5}$
D) 4 E) $-3+\sqrt{5}$

61. Si A, B, C, D, E, F, G, H, son números complejos cuyos argumentos están en progresión aritmética (en ese orden) de razón 15°, ¿cuál es el argumento de:

$$\overline{H\overline{G\overline{F\overline{E\overline{D\overline{C\overline{B\overline{A}}}}}}}}\ ?$$

Nota: $\overline{Z} \Rightarrow$ conjugado de Z

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{6}$

D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{4}$

62. Calcule: $\left(\dfrac{1+i\,\mathrm{ctg}\alpha}{1-i\,\mathrm{ctg}\alpha}\right)^4$ para $\alpha=15°$

A) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) $-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

D) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ E) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

63. Siendo:

$$M=\left(\frac{a^{-2}-(bi)^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}i}\right)^{-1} \text{ y } N=\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}i}{b^{-2}+a^{-2}}\right)^{-1}$$

señale la suma de dos de las raíces cúbicas de M×N.

A) –i B) i C) $\frac{1}{2}i$

D) $-\frac{1}{2}i$ E) 0

64. Tres números complejos K, Z y ω verifican lo siguiente:

$\frac{Z}{\omega}=1+2i$; $K+Z+(1-i)^2\omega=-3-2i$ y $K\omega=1+3i$

Donde $|K|>|\omega|$, calcule $K.\overline{K}+Z.\overline{Z}+\omega.\overline{\omega}$

A) $\sqrt{17}$ B) 12 C) 15
D) 17 E) 7

65. Sabiendo que $\{a;b;c\}\subset\mathbb{R}$, además: $Z_1=\sqrt{2}a+bi$, $Z_2=\sqrt{3}a+\sqrt{2}bi$ y $Z_3=a+b+ci$, calcule el mayor argumento de Z_3, tal que se verifique las igualdades siguientes:

$$\left|\frac{Z_1-\sqrt{2}-ci}{Z_2-\sqrt{3}-\sqrt{2}ci}\right|=1 \text{ y } |Z_3|=5$$

A) 37° B) 53° C) 217°
D) 143° E) 233°

66. ¿A qué es igual:

$$\frac{|Z_1|^2-|Z_2|^2}{\mathrm{Re}(Z_1)\mathrm{Im}(Z_2)-\mathrm{Re}(Z_2)\mathrm{Im}(Z_1)},$$

cuando $\arg\left(\dfrac{Z_1+Z_2}{Z_1-Z_2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$?

Z_1 y Z_2 $\in$ $\mathbb{C}$

A) –2 B) $\frac{1}{2}$ C) 4

E) 3 D) 2

67. La unión consecutiva de los afijos de 4 números complejos generan un cuadrado. Si uno de los afijos descansa sobre el eje real. Otro sobre el eje imaginario y además la diagonal del cuadrado vale $6\sqrt{2}$, calcular la suma de los otros dos complejos.

A) 9+6i B) 9(1+i) C) 6(1+i)
D) 9i+6 E) 6(1–i)

68. La gráfica que describen los afijos de todos los complejos "Z" que satisfacen la igualdad: $\mathrm{Im}(Z^2-\overline{Z})=2-\mathrm{Im}(Z)$, es:

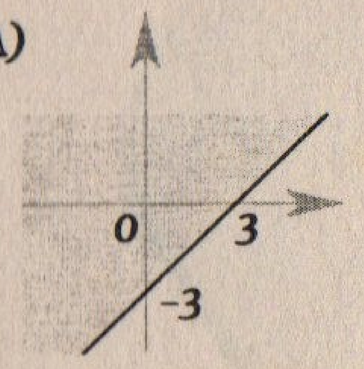
A) una parábola
B) una circunferencia
C) una elipse
D) una hipérbola
E) una recta

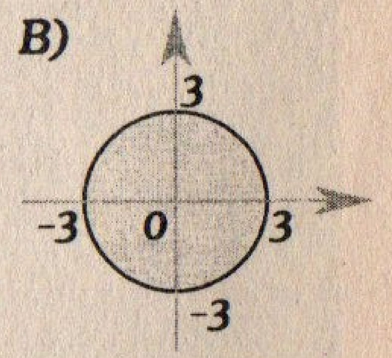
69. Calcular el área de la región generada por los complejos "Z" que presentan la siguiente característica:

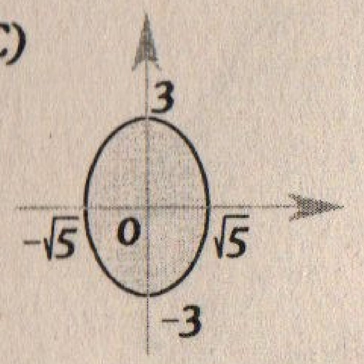
$$1\le|Z|\le5 \text{ y } \frac{\pi}{4}\le\arg(Z)\le\frac{2}{3}\pi$$

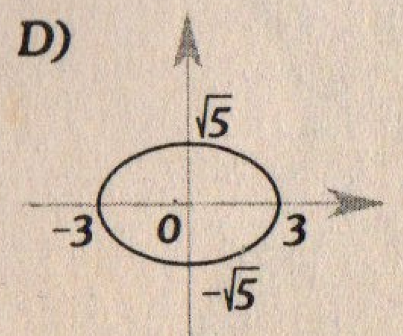
A) $(12\pi)u^2$ B) $(120\pi)u^2$ C) $(5\pi)u^2$
D) $(24\pi)^2$ E) $(15\pi)u^2$

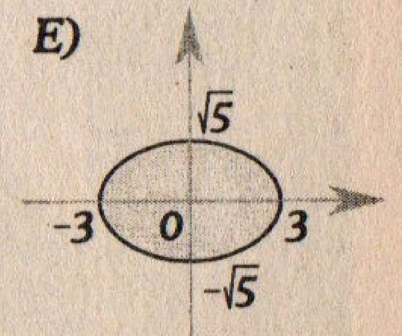
70. Grafique el lugar geométrico descrito por todos los $Z\in\mathbb{C}$, tal que: $|Z+2i|+|Z-2i|\le6$ (aproximado).

A)


B)


C)


D)


E)


Claves

01.	A	36.	E
02.	A	37.	B
03.	D	38.	A
04.	A	39.	E
05.	A	40.	D
06.	D	41.	A
07.	B	42.	D
08.	C	43.	A
09.	A	44.	A
10.	B	45.	C
11.	E	46.	E
12.	B	47.	E
13.	D	48.	B
14.	D	49.	E
15.	B	50.	D
16.	E	51.	A
17.	E	52.	C
18.	E	53.	D
19.	E	54.	E
20.	D	55.	A
21.	A	56.	D
22.	D	57.	E
23.	A	58.	C
24.	B	59.	A
25.	E	60.	E
26.	B	61.	D
27.	A	62.	D
28.	A	63.	A
29.	A	64.	D
30.	E	65.	A
31.	C	66.	D
32.	B	67.	C
33.	B	68.	D
34.	C	69.	C
35.	C	70.	C