



www.dirasats.com

هذا الغلاف لا يعبر عن حقوق الملكية او فحوى الكتاب, فهو مجرد واجهة للموقع المحمل منه



شكرا لك على ثقتك بنا وعلى اختيار موقعنا



www.dirasats.com



من اجل تواصل معنا المرجو زيارة الموقع ستجد جميع المعلومات

www.dirasats.com

UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôle Final
Session de rattrapage
Année 2010/2011
Durée 3 heures

Session de rattrapage 2011

<http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2>

mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II, III, IV et V sont indépendants

solution

ID composer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{X+1}{X^3(X^2+X+1)^2}$$

Réponse:

$$F = Q + \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{d+eX}{1+X+X^2} + \frac{f+gX}{(1+X+X^2)^2}$$

- Q rest de la division euclidienne de $X+1$ par $X^3(X^2+X+1)^2 \rightarrow Q=0$
- Pour calculer a, b, c on pose $h = X$ et on effectue un développement limit  a l'ordre 2 de $h^3 F$

$$h^3 F = \frac{1+X}{(1+X+X^2)^2} \Big|_{X=h} = \frac{1+h}{(1+h+h^2)^2}$$

$$= \frac{1+h}{1+h^2+2h+2h^2} = \frac{1+h}{1+2h+3h^2}$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{1+h}{1+2h+3h^2} & \frac{1+2h+3h^2}{1-h-h^2} \\ \hline -h-3h^2 & \\ -h-2h^2 & \\ \hline -h^2 & \end{array}$$

par suite

$$F = \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} + \dots$$

- Pour calculer d, e, f, g on pose $h = 1 + X + X^2$ et on effectue un développement limité à l'ordre 1 de $h^2 F \Big|_{X^2=h-1-X}$

$$\begin{aligned}
 h^2 F &= \frac{1+X}{X^3} = \frac{1+X}{X(h-X-1)} = \frac{1+X}{Xh-(X^2+X)} \\
 &= \frac{1+X}{Xh-(h-1)} = \frac{1+X}{(X-1)h+1} \quad (*) \\
 &= \frac{(1+X)((-1-X)-1)h+1}{((X-1)h+1)((-1-X)-1)h+1)} \\
 &= \frac{(1+X)(1-(2+X)h)}{((X-1)h+1)(1-(2+X)h)} = \frac{1+X-(X^2+3X+2)h}{1-3h+O(h^2)} \\
 &= \frac{1+X-(h+2X+1)h}{1-3h+O(h^2)} = \frac{1+X-(2X+1)h+O(h^2)}{1-3h+O(h^2)}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1+X-(1+2X)h}{X+1-3(X+1)h} \Bigg| \frac{1-3h}{X+1+(X+2)h}$$

par suite

$$F = \frac{X+1}{(1+X+X^2)^2} + \frac{X+2}{1+X+X^2} + \dots$$

Remarque : On peut aussi faire directement la division suivant les puissances croissante de h , avec retenue dans (*), le pivot est $1/1 = 1 \pmod{h}$

$$\begin{array}{r|l}
 1+X & 1+(X-1)h \\
 1+X+(X^2-1)h & \\
 = 1+X+(h-X-2)h & \\
 = 1+X-(X+2)h & 1+X+(X+2)h \\
 \hline
 (X+2)h &
 \end{array}$$

Autre méthode pour calculer d, e, f, g par l'identité de Besout, on cherche U tel que $UX^3 = 1 + V(X^2 + X + 1) \longrightarrow U = 1$ alors $f + gX$ est le reste de $(X+1)U$ par $h \longrightarrow f + gX = 1 + X$, on a $(1+X) - X^3(f+gX) = (1+X)(1-X)h$, alors $d + eX$ est le reste $(1+X)(1-X)$ par $h \longrightarrow d + eX = 2 + X$

Finalement

$$F = \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} + \frac{X+1}{(1+X+X^2)^2} + \frac{X+2}{1+X+X^2}$$

Autre méthode pour calculer a, b, c, d, e, f, g par identification de :

$$X + 1 = X^3(X^2 + X + 1)^2 F \quad \square$$

II On considère dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 le système :

$$\mathcal{S} = ((1, -1, 2), (-1, -1, 0), (3, -5, 8), (1, -5, 6))$$

1 Justifier que le rang de \mathcal{S} est 2

Réponse : On résout le système

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0 \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 - 3x_3 - x_4 & (*) (1) \\ -(x_2 - 3x_3 - x_4) - x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2(x_2 - 3x_3 - x_4) + 8x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (*) (1) \\ -2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1) \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 & (*) (2) \end{cases}$$

2 inconnues éliminées \longrightarrow le rang = 2 \square

Autre méthode : (v_1, v_2) est libre car $1/-1 \neq -1/-1$. Donc le rang est au moins 2, on a (calcul) $v_3 = 4v_1 + v_2$ et $v_4 = 3v_1 + 2v_2$ donc le rang = 2 \square

Autre méthode : On applique l'algorithme de complétion à savoir (rappel) :
 E espace vectoriel, $L \subset E$ libre, $G \subset E$ générateur :

- i. Si $G = \emptyset$ terminer L est une base
- ii. Soit $x \in G$, $G = G \setminus \{x\}$
- iii. Si $x \notin \text{vec}(L)$ alors $L = L \cup \{x\}$
- iv. Aller à i.

Ici $E = \text{vect}(\mathcal{S})$, $L = \emptyset$ et $G = \mathcal{S}$

- i. $G \neq \emptyset$
- ii. $x = v_1 \longrightarrow G = (v_2, v_3, v_4)$
- iii. $x \notin \text{vect}(L) = \{0\} \longrightarrow L = (v_1)$
- i. $G \neq \emptyset$
- ii. $x = v_2 \longrightarrow G = (v_3, v_4)$
- iii. $x \notin \text{vect}(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
- i. $G \neq \emptyset$
- ii. $x = v_3 \longrightarrow G = (v_4)$
- iii. $x \in \text{vect}(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
- i. $G \neq \emptyset$
- ii. $x = v_4 \longrightarrow G = \emptyset$
- iii. $x \in \text{vect}(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
- i. $G = \emptyset \longrightarrow L = (v_1, v_2)$ est une base \square

Autre méthode : On ramène à une matrice échelonnée la matrice du système (v_1, v_2, v_3, v_4)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & -5 \\ 2 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rang} = 2 \quad \square$$

2 Donner une base de $\text{vect}(\mathcal{S})$

Réponse : Par la première méthode x_1, x_2 inconnues éliminées $\longrightarrow (v_1, v_2)$ base. Par la deuxième et la troisième méthode aussi (v_1, v_2) base. \square

3 Donner la décomposition des autres éléments de \mathcal{S} dans la base ci-dessus (On ne demande pas de calculer toutes les décompositions possibles).

Réponse : Par la première méthode, la solution du système linéaire est :

$$\{(-4x_3 - 3x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Soit

$$\begin{array}{rcl} & -v_3 & -v_4 \\ x_1 & = & -4x_3 - 3x_4 \\ x_2 & = & -x_3 - 2x_4, \end{array}$$

En lisant verticalement la solution $\longrightarrow v_3 = 4v_1 + v_2 \quad v_4 = 3v_1 + 2v_2 \quad \square$

Autre possibilités :

$$(v_1, v_3) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_2 = -4v_1 + v_3 \\ v_4 = -5v_1 + 2v_3 \end{cases}$$

$$(v_1, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_2 = -\frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_4 \\ v_3 = \frac{5}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_4 \end{cases}$$

$$(v_2, v_3) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = -\frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}v_3 \\ v_4 = \frac{5}{4}v_2 + \frac{3}{4}v_3 \end{cases}$$

$$(v_2, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = -\frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_4 \\ v_3 = \frac{-5}{3}v_2 + \frac{4}{3}v_4 \end{cases}$$

$$(v_3, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{2}{5}v_3 - \frac{1}{5}v_4 \\ v_2 = -\frac{3}{5}v_3 + \frac{4}{5}v_4 \end{cases} \quad \square$$

III On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble de toutes les applications de \mathbb{N} vers \mathbb{R} , c'est un espace vectoriel sur \mathbb{R} pour les lois $f + g : x \longrightarrow f(x) + g(x)$ et $\lambda f : x \longrightarrow \lambda f(x)$. On pose E le sous ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$$

1 Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Réponse :

- La fonction définie par $\theta(n) = 0$ pour tout n vérifie bien $\theta(n+2) = 0 = 2 \cdot 0 - 0 = 2\theta(n+1) - \theta(n)$, donc $\theta \in E$, donc $E \neq \emptyset$
- Si $f, g \in E$ et $\lambda \in K$, on a pour tout n $(f + \lambda g)(n+2) = f(n+2) + \lambda g(n+2) = (2f(n+1) - f(n)) + \lambda(2g(n+1) - g(n)) = 2(f(n+1) + \lambda g(n+1)) - (f(n) + \lambda g(n)) = 2(f + \lambda g)(n+1) - (f + \lambda g)(n)$, donc $f + \lambda g \in E$ \square

2 Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(f) = (f(0), f(1))$ pour tout $f \in E$.

i. Montrer que φ est linéaire.

Réponse : Si $f, g \in E$ et $\lambda \in K$ on a $\varphi(f + \lambda g) = ((f + \lambda g)(0), (f + \lambda g)(1)) = (f(0) + \lambda g(0), f(1) + \lambda g(1)) = (f(0), f(1)) + \lambda(g(0), g(1)) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$ \square

- ii. Soit $f \in E$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, montrer que $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réponse : Récurrence sur n , supposons la propriété vraie pour tout entier $< n$, si $n = 0$ ou $n = 1$ la propriété est vraie sinon $n \geq 2$ et on a $f(n) = 2f(n-1) - f(n-2) = 2 \cdot 0 - 0 = 0$ \square

- iii. En déduire que φ est injective.

Réponse : Soit $f \in \ker(\varphi)$, donc $\varphi(f) = 0$, soit $(f(0), f(1)) = (0, 0)$, soit $f(0) = f(1) = 0$, d'après la question précédente $f(n) = 0$ pour tout n , donc $f = 0$, soit $\ker(\varphi) = \{0\}$, donc φ est injective \square

- iv. Soit $\bar{\varphi} : E \rightarrow \text{Im}(\varphi)$ l'application définie par $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$. Montrer que $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Réponse :

- $\bar{\varphi}$ est surjective car si $y \in \text{Im}(\varphi)$ il existe $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$ donc $y = \bar{\varphi}(x)$
- $\bar{\varphi}$ est injective car si $f \in \ker(\bar{\varphi})$ on a $\bar{\varphi}(f) = 0$, donc $\varphi(f) = 0$, donc $f = 0$
- $\bar{\varphi}$ est linéaire car φ est linéaire \square

- v. En déduire que $\dim(E) \leq 2$.

Réponse : On a $\text{Im}(\varphi)$ sous espace vectoriel de \mathbb{R}^2 , donc $\text{Im}(\varphi)$ de dimension finie ≤ 2 . Comme E est isomorphe à $\text{Im}(\varphi)$, alors E est de dimension finie ≤ 2 aussi \square

- 3 On considère les applications $g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ données par $g(n) = 1$ et $h(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- i. Montrer que g et h appartiennent à E .

Réponse : On a $g(n+2) = 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2g(n+1) - g(n)$ et $h(n+2) = n+2 = 2(n+1) - n = 2h(n+1) - h(n)$ \square

- ii. Montrer que le système $((g(0), g(1)), (h(0), h(1)))$ est libre dans \mathbb{R}^2 .

Réponse : $((g(0), g(1)), (h(0), h(1))) = ((1, 1), (0, 1))$ et $1/0 \neq 1/1$ \square

- iii. En déduire que le système (g, h) est libre dans E .

Réponse : Une relation $\alpha g + \beta h = 0$ entraîne $\alpha g(0) + \beta h(0) = 0$ et $\alpha g(1) + \beta h(1) = 0$ donc $\alpha(g(0), g(1)) + \beta(h(0), h(1)) = (0, 0)$ par la question précédente $\alpha = \beta = 0$ \square

- iv. Montrer que $\dim(E) = 2$.

Réponse : Comme (g, h) est libre, $\dim(E) \geq 2$, par la question 2 on a $\dim(E) \leq 2$, donc $\dim(E) = 2$ \square

- 4 Montrer que pour tout $f \in E$ ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tel que $f = \alpha g + \beta h$

Réponse : Comme (g, h) est libre et $\dim(E) = 2$, (g, h) est une base de E \square

- 5 Montrer que pour tout $f \in E$ on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f(0) + (f(1) - f(0))n$

Réponse : On a $f = \alpha g + \beta h \rightarrow f(0) = \alpha, f(1) = \alpha + \beta \rightarrow \alpha = f(0)$ et $\beta = f(1) - f(0)$ \square

Soit $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$) et sur \mathbb{R} le déterminant d'ordre n

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \vdots \\ \dots & & & & & & \ddots & 0 \\ \dots & & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$) on a $\delta_{n+2} = 2\delta_{n+1} - \delta_n$

Réponse : On développe par rapport à la première colonne \square

7 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(n) = \delta_{n+1}$

i. Montrer que $f \in E$

Réponse : $f(n+2) = \delta_{n+3} = 2\delta_{n+2} - \delta_{n+1} = 2f(n+1) - f(n)$ \square

ii. En utilisant 5. montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \delta_n = n + 1$

Réponse : On a $\delta_n = f(n-1) = f(0) + (f(1)) - f(0)(n-1) = \delta_1 + (\delta_2 - \delta_1)(n-1) = 2 + (3-2)(n-1) = n+1$ \square

IV Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Justifier que le polynôme caractéristique de A est $P_A = -(X-1)^2(X-2)$

Réponse :

$$P_A = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)(1-X) \quad \square$$

2 Donner les valeurs propres de A

Réponse : $sp(A) = \{1, 2\}$ \square

3 Donner les vecteurs propres de A

$$(x, y, z) \in E_1 \iff \begin{cases} 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow E_1 = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$$

$$(x, y, z) \in E_2 \iff \begin{cases} -x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \longrightarrow E_2 = \{0, z, z \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((0, 1, 1)) \quad \square$$

4 A est elle diagonalisable ? (justifier votre réponse).

Réponse : A est diagonalisable car P_A est scindé et pour toute valeur propre multiple λ de A on a $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$ \square

V Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E . On suppose que $f \circ g = 0$

1 Montrer que $Im(g) \subset ker(f)$

Réponse : Soit $y \in Im(g)$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$, donc $f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = 0$, donc $y \in ker(f)$ \square

2 En déduire que $dim(Im(g)) + dim(Im(f)) \leq dim(E)$

Réponse : On a $Im(g) \subset ker(f)$, donc $dim(Im(g)) \leq dim(ker(f)) = dim(E) - dim(Im(f))$, donc $dim(Im(g)) + dim(Im(f)) \leq dim(E)$ \square

Dans la suite, on suppose de plus que $f + g$ est bijectif

3 Montrer que $\forall y \in E \quad \exists x \in E \quad y = f(x) + g(x)$

Réponse : $f + g$ bijectif entraîne (équivalent en fait à) $f + g$ surjectif \square

4 En déduire que $E = Im(f) + Im(g)$

Réponse : Par la question précédente $E \subset Im(f) + Im(g)$ donc $E = Im(f) + Im(g)$ \square

5 Montrer que $dim(E) = dim(Im(g)) + dim(Im(f))$

Réponse : On a $E = Im(f) + Im(g)$ donc $dim(E) = dim(Im(f) + Im(g)) \leq dim(Im(f)) + dim(Im(g))$, avec la question 2 on a l'inégalité inverse, donc $dim(E) = dim(Im(g)) + dim(Im(f))$ \square

6 Montrer que $Im(f) + Im(g)$ est directe

Réponse : On a $dim(Im(f) + Im(g)) = dim(Im(f)) + dim(Im(g))$, comme $Im(f) + Im(g)$ de dimension finie, $Im(f) + Im(g)$ est directe \square

7 Montrer que $\forall (x_1, x_2) \in E^2$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = f(x_1)$ et $g(x) = g(x_2)$

Réponse : Posons $y = f(x_1) + g(x_2)$ par la question 3, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) + g(x)$, soit $f(x_1) + g(x_2) = f(x) + g(x)$, comme $Im(f) + Im(g)$ est directe, on a $f(x) = f(x_1)$ et $g(x) = g(x_2)$ \square

8 Montrer que $\forall (x_1, x_2) \in E^2$ il existe $x \in E$ tel que $x \equiv x_1 \mod (ker(f))$ et $x \equiv x_2 \mod (ker(g))$

Réponse : $f(x) = f(x_1)$ et $g(x) = g(x_2)$ équivaut à $f(x - x_1) = 0$ et $g(x - x_2) = 0$, donc à $x - x_1 \in ker(f)$ et $x - x_2 \in ker(g)$ \square