

## المشتقات العليا

لايجاد المشتقة الثانية فإننا نعتبر اقتران المشتقة الأولى اقتران أصلي ونشتق ، وإذا أردنا ايجاد المشتقة الثالثة فإننا نعتبر اقتران المشتقة الثانية اقتران أصلي وهكذا ...

**ملاحظة** إذا كانت  $ص = ق(س)$  فإنه يرمز للمشتقة الأولى برمز:  $ص' أو \frac{دص}{دس} أو ق'(س)$  وللمشتقة الثانية  $ص'' أو \frac{د^2ص}{دس^2} أو ق''(س)$  والمشتقات فوق الثالثة نكتبها رقما فمثلاً:

المشتقة الرابعة:  $ص^{(4)} أو \frac{د^4ص}{دس^4} أو ق^{(4)}(س)$

فمثلاً: إذا كانت  $ص = ق(س) = ٢س^٥ + ٤س^٤$  فإن  $ص' = \frac{دص}{دس} = ق'(س) = ١٠س^٣ + ١٦س^٢$  (المشتقة الأولى)

$ص'' = \frac{د^2ص}{دس^2} = ق''(س) = ٤٠س + ٣٢$  (المشتقة الثانية)

$ص''' = \frac{د^3ص}{دس^3} = ق'''(س) = ٤٠$  (المشتقة الثالثة)

$ص^{(4)} = \frac{د^4ص}{دس^4} = ق^{(4)}(س) = ٠$  (المشتقة الرابعة)

**مثال**  $ق(س) = \frac{٤س}{١٢} + \frac{٣س^٥}{٣} - ٨س^٢$  جد  $ق''(٤)$

**الحل**

$$ق(س) = \frac{٤س}{١٢} + \frac{٣س^٥}{٣} - ٨س^٢$$

$$ق'(س) = \frac{٤}{١٢} + ٥س^٤ - ١٦س$$

$$ق''(س) = ٢٠س^٣ - ١٦ = ١٨ = ١٠ + ٨ = ق''(٤)$$

**مثال**  $ق(س) = \frac{٥}{٢س}$  جد  $ق''(١)$

**الحل**

$$ق(س) = \frac{٥}{٢س} = \frac{٥}{٢} س^{-١}$$

$$ق'(س) = -\frac{٥}{٢} س^{-٢} = -\frac{٥}{٢س^٢}$$

$$ق''(س) = \frac{٥}{س^٣} = \frac{٥}{١} = ٥$$

مثال ق (س) = 2س + 16س - 16س جد ق (2)

الحل

ق (س) = 2س + 16س - 16س ← ق (س) = 8س - 16س  
 ق (س) = 2س + 32س - 32س ← ق (س) = 48س - 96س  
 ق (2) = 90 = 6 - 96 = 16س - 2 × 48س

مثال إذا كان ق (س) = 1/3س ن وكانت ق (س) = 40س - 3 فجد ن

الحل

ق (س) = 1/3س × ن × (1 - ن) × 1/3س = ق (س) ، ق (س) = 1/3س × ن × (1 - ن) × 1/3س  
 ق (س) = 1/3س × ن × (1 - ن) × 1/3س = 40س - 3  
 ∴ 1/3س × ن × (1 - ن) × 1/3س = 40س - 3  
 نبحت عن ثلاثة أعداد متتالية حاصل ضربها 120  
 فتكون : 120 = 4 × 5 × 6 ∴ ن = 6

مثال إذا كان ق (س) = 2س ن وكانت ق (4) (س) = أس فجد قيمة أ

الحل

ق (س) = 2س ن = ق (س) ، ق (س) = 2س ن × (1 - ن) × 1/3س  
 ق (س) = 2س ن × (1 - ن) × 1/3س = 40س - 3  
 ق (4) (س) = 2س ن × (1 - ن) × 1/3س = أس  
 ∴ 4 = 40س - 3 ← ن = 8 ∴ أ = 2 × 8 × 7 × 6 × 5 = 3360

مثال إذا كان ص = أس ن + 1/3س أثبت أن 2س × 2ص = ن (1 - ن) ص

الحل

ص = أس ن + 1/3س ← 2ص = 2أس ن + 2/3س  
 2ص = 2أس ن + 2/3س  
 2ص = 2أس ن + 2/3س



$$2s \times (1-n) + (1-n)s = \frac{2s}{2s} \times 2s$$

وكانت ق''، ه'' معرفة أثبت أن  $\frac{ق''}{ق} + \frac{ه''}{ه} = \frac{ل''}{ل}$  إذا كان ل(س) = ق(س) × ه(س) وكانت ق(س) × ه(س) = ج (ثابت)

الحل

$$\leftarrow \text{ل} = \text{ق} \times \text{ه} + \text{ه} \times \text{ق} + \text{ق} \times \text{ه} + \text{ه} \times \text{ق} + \text{ق} \times \text{ه} + \text{ه} \times \text{ق} = 6 \times \text{ج}$$

$$\therefore \text{ل}'' = \text{ق}'' \times \text{ه}'' + \text{ق}'' \text{ بالقسمة على } \text{ق}'' \times \text{ه}''$$

$$\frac{\text{ل}''}{\text{ق}''} = \frac{\text{ق}'' \times \text{ه}''}{\text{ق}'' \times \text{ه}''} + \frac{\text{ق}''}{\text{ق}''} = \frac{\text{ل}''}{\text{ق}'' \times \text{ه}''} + \frac{\text{ه}''}{\text{ق}''}$$

**مثال** إذا كانت  $v = s^3 + s^2$  فجد معدل تغير  $v$  بالنسبة لـ  $s$  عندما  $s = 2$

$$۱۴ = ۲ + {}^۲(۲) ۳ = ۲ + {}^۲س۳ = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$300 = {}^2(10)^3 = {}^2س^3 = \frac{دح}{دس} \leftarrow$$

## قاعدة السلسلة

إذا كان ق، هـ قابلتين للاشتقاق وكانت ص = ق(ع)، ع = هـ(س) فإن

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دق}{دع} \times \frac{ده}{دس} \quad \text{(قانون السلسلة)}$$

**مثال** جد:  $\frac{دص}{دس}$   $ص = ٥ - ع٧$ ،  $ع = ٣س + ٨$

**الحل**  $\frac{دص}{دع} = ٧$ ،  $\frac{ده}{دس} = ٣$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ٧ \times ٣ = ٢١$$

**مثال** جد:  $\frac{دص}{دس}$   $ص = ٥ + هـ٣$ ،  $هـ = ٣س + ٢$

**الحل**  $\frac{دص}{ده} = ٣$ ،  $\frac{ده}{دس} = ٣$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{ده} \times \frac{ده}{دس} = ٣ \times ٣ = ٩$$

**مثال** جد:  $\frac{دص}{دس}$   $ص = ٢ل - ٥$ ،  $ل = ٤س + ٨$

**الحل**  $\frac{دص}{دل} = ٢$ ،  $\frac{دل}{دس} = ٤$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دل} \times \frac{دل}{دس} = ٢ \times ٤ = ٨$$

$$= (٢س + ٤)(٥ - (٢س + ٤)) = (٢س + ٤)(٥ - ٢س - ٤) = (٢س + ٤)(١ - ٢س)$$

**مثال** جد:  $\frac{دص}{دس}$  عند م = ٤  $ص = ٥ + م٢ + ٣م$ ،  $م = ٣س + ٢$

**الحل**  $\frac{دص}{دم} = ٦م + ٣$ ،  $\frac{دم}{دس} = ٣$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دم} \times \frac{دم}{دس} = (٦م + ٣) \times ٣$$

$$= ٣(٦ \times ٤ + ٣) = ٣(٢٤ + ٣) = ٣ \times ٢٧ = ٨١$$

جدد عند م = ٤ :  $٤ = ٣س + ٢ \rightarrow ٢ = ٣س \rightarrow ٢/٣ = س$

$$١٠٠ = ١ \times ١٠٠ = \frac{دص}{دس} \text{ أو } ١٠٠ = ١ - ١٠٠ = \frac{دص}{دس}$$





مثال ق (س) = (س - ٥)٢ : جد ق (٢) = ٤ (س - ٥)٢ (٢) = ٤ (٢ - ٥)٢ = ٤ (٣)٢ = ٣٦

الحل ق (س) = (س - ٥)٢ : جد ق (٢) = ٤ (س - ٥)٢ (٢) = ٤ (٢ - ٥)٢ = ٤ (٣)٢ = ٣٦

ق (س) = (س - ٥)٢ : جد ق (٢) = ٤ (س - ٥)٢ (٢) = ٤ (٢ - ٥)٢ = ٤ (٣)٢ = ٣٦

ق (٢) = ٤ (٢ - ٥)٢ = ٤ (٣)٢ = ٣٦

مثال ق (س) = (س - ٤)٢ : جد ق (٢) = ٤ (س - ٤)٢ (٢) = ٤ (٢ - ٤)٢ = ٤ (٢)٢ = ٤

الحل ق (س) = (س - ٤)٢ : جد ق (٢) = ٤ (س - ٤)٢ (٢) = ٤ (٢ - ٤)٢ = ٤ (٢)٢ = ٤

ق (٢) = ٤ (٢ - ٤)٢ = ٤ (٢)٢ = ٤

مثال ص = (١ + ع) / (١ - ع) : جد ص عند ع = ١

ص = (١ + ع) / (١ - ع) : جد ص عند ع = ١

عند س = 1 تكون ع = 2 + 1 = 3

الحل

$$\frac{2-}{(1-ع)^2} \times \left( \frac{1+ع}{1-ع} \right)^2 = \frac{1 \times (1+ع) - 1 \times (1-ع)}{(1-ع)^2} \times \left( \frac{1+ع}{1-ع} \right)^2 = \frac{دص}{دع}$$

$$2- = \frac{2-}{4} \times \frac{4}{2} \times 2 = \frac{2-}{2(1-3)} \times \left( \frac{1+3}{1-3} \right)^2 = \frac{دص}{دع} : 3 = ع \text{ وعند ع = 3}$$

$$4 = 2 + 1 \times 2 = 2 + س^2 = \frac{دع}{دس}$$

$$8- = 4 \times 2- = \frac{دع}{دس} \times \frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس}$$

س =  $\frac{دص}{دس} = \frac{س^4}{(1-2س)^4}$  جد:  $\frac{دص}{دس}$

سؤال

$$\left( \frac{س}{1-2س} \right)^4 = \frac{س^4}{(1-2س)^4} = ص$$

الحل

$$\frac{س^2 \times س - 1 \times (1-2س)}{2(1-2س)^2} \times \left( \frac{س}{1-2س} \right)^3 = \frac{دص}{دس}$$

$$\frac{س^3 - 1 + 2س}{2(1-2س)^2} \times \frac{س^3}{(1-2س)^3} = \frac{دص}{دس}$$

$$\text{مثال} \quad \sqrt[5]{(س^4 + 3س^2)} = ق(س) \quad \text{جد ق(س)} = \sqrt[5]{(س^4 + 3س^2)}$$

$$\text{الحل} \quad ق(س) = \sqrt[5]{(س^4 + 3س^2)} \leftarrow ق(س) = \frac{8}{5} \sqrt[5]{(س^4 + 3س^2)} \times \frac{2}{5} (س^4 + 3س^2)$$

$$\text{مثال} \quad \sqrt[3]{(س^3 + 2س)} = ص \quad \text{جد: د ص} = \frac{2+3س}{\sqrt[3]{(س^3 + 2س)}}$$

$$\text{الحل} \quad ص = \sqrt[3]{(س^3 + 2س)} \leftarrow \frac{1}{ص} = \frac{1}{\sqrt[3]{(س^3 + 2س)}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(س^3 + 2س)} \times \frac{2}{3} (س^3 + 2س)$$

$$\frac{3+2س}{\sqrt[3]{(س^3 + 2س)}} = \frac{3+2س}{\sqrt[3]{(س^3 + 2س)}} =$$

لاحظ من المثال السابق أن مشتقة الجذر التربيعي =  $\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$

**مثال** إذا كانت ص =  $\frac{1 - ع^2}{(ع)هـ}$  ،  $ع = \sqrt[3]{3} | 2س - 1$

وكانت هـ = (3) ، هـ = (3) ، 6 = - : جد  $\frac{دص}{دس}$  عندما س = 1

**الحل** عندما س = 1 فإن ع =  $\sqrt[3]{3} | 2س - 1$  =  $\sqrt[3]{3} | 2 - 1$  =  $\sqrt[3]{3}$  = 1 × 3 = 3

$\frac{دص}{دع} = \frac{هـ(ع) \times (1 - ع^2) - 2 \times (ع)هـ}{هـ^2(ع)}$  وعند ع = 3

$\frac{دص}{دع} = \frac{36}{9} = \frac{(6 - 5) - 2 \times 3}{9} = \frac{36}{9} = 4$

$\frac{2}{\sqrt[3]{(1 - 2س)}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt[3]{(1 - 2س)}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - 2س)}} \times 3 = \frac{دع}{دس} \leftarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - 2س)}} = 3 = \sqrt[3]{(1 - 2س)^3} = 1 - 2س$   
 $8 = 2 \times 4 = \frac{دع}{دس} \times \frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \leftarrow 2 = \frac{2}{1} = \frac{2}{\sqrt[3]{(1 - 2س)}} = \frac{دع}{دس} | 1 = س$

**مثال** إذا كان ق = (3) ، 4 = (3) ، ق = (3) ، 5 = (3) فجد  $\frac{د}{دس} (4س | ق(س))$  عند س = 3

**الحل**  $\frac{د}{دس} (4س | ق(س)) = 4س \times \frac{ق(س)}{2 | ق(س)} + 4 \times ق(س)$  وعند س = 3

$23 = 8 + 15 = 4 \times 2 + \frac{5 \times 3 \times 4}{2 \times 2}$



**مثال**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{هـ}^2(\text{س}) + 5 = \text{س} \geq 1 \\ \text{هـ}^2(\text{س}) + 3 = \text{س} < 1 \end{array} \right.$$

وكانت هـ(س) < 0 ، ل(س) قابلاً للاشتقاق عند س = 1 فإذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = 5\text{س} \times \text{هـ}(\text{س}) \text{ فجد ق}(1)$$

**الحل**

يجب معرفة هـ(1) ، هـ'(1)

$$\text{ل(س) متصل عند س} = 1 \leftarrow \text{هـ}^2(1) = 5 + 1 \times 3 = 9 \leftarrow \text{هـ}^2(1) = 9 - 5 = 4$$

$$\therefore \text{هـ}(1) = 2 , \text{هـ}'(1) = 2 \text{ نأخذ هـ}(1) = 2$$

$$\text{ل}(1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{هـ}^2(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س}) , \text{س} \geq 1 \\ \text{هـ}^2(\text{س}) , \text{س} < 1 \end{array} \right.$$

$$\text{ل}_-(1) = \text{ل}_+(1) \leftarrow 2 \times \text{هـ}(1) \times \text{هـ}'(1) = 1 \times 12 = 12$$

$$\leftarrow 2 \times 2 \times \text{هـ}(1) = 12 \leftarrow \text{هـ}(1) = \frac{12}{4} = 3$$

$$\text{ق}(\text{س}) = 5\text{س} \times \text{هـ}(\text{س}) + \text{هـ}'(\text{س}) \times 5 = 5 \times 3$$

$$\text{ق}(1) = 5 \times 3 + 2 \times 5 = 25$$

### مشتقة الاقترانات المركبة

إذا كان ق ، هـ قابلين للاشتقاق فإن:

$$\text{ق}(\text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})$$

$$\text{وأيضاً: } (\text{هـ} \circ \text{ق})'(\text{س}) = \text{هـ}'(\text{ق}(\text{س})) \times \text{ق}'(\text{س})$$

CAMERA360  
LITE

فجد:  $\frac{5}{س} = (س) هـ$  ،  $س + 2 = 3$  ،  $\frac{5}{س}$

مثال

إذا كان ق (س) =  $س + 2$  ، هـ (س) =  $\frac{5}{س}$  فجد:

(أ) ق هـ (س) = (س) هـ

(ب) هـ (س) =  $\frac{5}{س}$  ، ق (س) =  $س + 2$

الحل

(أ) ق هـ (س) = (س) هـ =  $\frac{5}{س}$  ، ق (س) =  $س + 2$  ، هـ (س) =  $\frac{5}{س}$

(ب) هـ (س) =  $\frac{5}{س}$  ، ق (س) =  $س + 2$  ، هـ (س) =  $\frac{5}{س}$

(ج) ق هـ (س) = (س) هـ =  $\frac{5}{س}$  ، ق (س) =  $س + 2$  ، هـ (س) =  $\frac{5}{س}$

مثال

إذا كان ق (س) =  $س + 2$  ، هـ (س) =  $\frac{5}{س}$  فجد:

(أ) ق هـ (س) = (س) هـ

(ب) هـ (س) =  $\frac{5}{س}$  ، ق (س) =  $س + 2$

(ج) ق هـ (س) = (س) هـ

الحل

(أ) ق هـ (س) = (س) هـ =  $\frac{5}{س}$  ، ق (س) =  $س + 2$  ، هـ (س) =  $\frac{5}{س}$

(ب) هـ (س) =  $\frac{5}{س}$  ، ق (س) =  $س + 2$  ، هـ (س) =  $\frac{5}{س}$

(ج) ق هـ (س) = (س) هـ =  $\frac{5}{س}$  ، ق (س) =  $س + 2$  ، هـ (س) =  $\frac{5}{س}$

مثال

إذا كان ق (س) =  $س + 2$  ، هـ (س) =  $\frac{5}{س}$  فجد:

(أ) ق هـ (س) = (س) هـ

(ب) هـ (س) =  $\frac{5}{س}$  ، ق (س) =  $س + 2$

(ج) ق هـ (س) = (س) هـ

هـ (س) =  $\frac{5}{س}$  ، ق (س) =  $س + 2$  ، هـ (س) =  $\frac{5}{س}$



**سؤال** إذا كان  $ق(س) = \begin{cases} 2س + 3س \\ 3س \end{cases}$  ،  $س \geq 2$  ،  $هـ(س) = (3 - 2س)^4$  ،

$س < 2$  ،  $س < 2$  ، جد:  $ق(5هـ)$   $(2)$

**الحل**  $ق(س) = \begin{cases} 2س + 3س \\ 3س \end{cases}$  ،  $س > 2$  ،  $هـ(س) = 4(3 - 2س)^3 \times 2س$  ،  $س < 2$  ،  $3س^2$

$$ق(5هـ) = (2) \times ق(5هـ) \times (2) \times هـ(2) = 80$$

$$ق(1) \times (4 \times 1 \times 4) = 16 \times (3 + 2) = 80$$

**سؤال** إذا كان  $ق(س) = 3س + 2س$  ،  $هـ(س) = 12 - اس$  ، جد:  $ق(5هـ)$   $(2)$

**الحل** في هذا المثال لا يمكن تطبيق قاعدة السلسلة لاننا نحتاج  $هـ(2)$  ولكن هـ غير قابل للاشتقاق عند  $س = 2$  لذلك نجد  $ق(5هـ)$   $(س)$

$$ق(5هـ) = (س) = ق(هـ(س)) = (اس - 12) + 3(2س + 3س) = 3س + 2(2س) + 3(اس - 12)$$

$$ق(5هـ) = (س) = 2(2س - 2) = 4(2 - 2) = 0$$

**سؤال** إذا كان  $ق(س) = 3س + 2س$  ،  $هـ(س) = 2س + 3س$  ، جد:

$$(1) ق(5هـ) = (1) (2) ق(5هـ) = (1) (3) ق(5هـ) = (4) ق(5هـ) = (1)$$

$$ق(س) = 3س + 2س$$

$$ق(س) = 6س + 2$$

$$(1) ق(5هـ) = (1) ق(هـ(1)) = (1) ق(3) = 5 \times 3^3 = 135$$

$$(2) ق(5هـ) = (1) ق(هـ(1)) = (1) ق(3) = 5 \times 2^3 = 40$$





### ملاحظة

إذا كانت ص = ق (س) فإن ص = ق (س) وإذا كانت ص = ق (س) فإن ص = ق (س)  $7 \times (7 \text{ س})$  وإذا كانت ص = ق (س + 3 + 5 س) فإن ص = ق (س + 3 + 5 س)  $\times (3 \text{ س} + 2 + 5)$  وبشكل عام إذا كانت ص = ق (س) فإن ص = ق (س)  $\times (3 \text{ س} + 2 + 5)$

### مثال

إذا كانت ص = ق (س + 3 + 5 س) وكانت ق (1) = 4 ، ق (2) = 7  
فجد  $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$  عند س = 1

### الحل

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ق (س + 3 + 5 س)} \times (3 \text{ س} + 2 + 5) \text{ وعند س = 1}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ق (2)} = 5 \times 7 = 5 \times 2 = 35$$

### مثال

إذا كانت ق (س + 3 + 5 س) = 5 س + 7 س فجد: ق (7)

### الحل

نشتق الطرفين: ق (س + 3 + 5 س) = 3  $\times (1 + 3 \text{ س} + 2 + 5 \text{ س})$

للحصول على ق (7): نضع 3 س + 1 = 7  $\leftarrow 3 \text{ س} = 6 \leftarrow \text{س} = 2$

بوضع س = 2: ق (7) = 3  $\times (7) = 21 = 7 + 2 \times 10 = 7 + 2 \times 5 = 27 \leftarrow \text{ق (7)} = \frac{27}{3} = 9$

### مثال

إذا كان ق (س + 3 + 5 س) = 2 س + 6 س فجد: ق (2)

### الحل

ق (س + 3 + 5 س) = 3 س + 12 س بوضع س + 1 = 2  $\leftarrow \text{س} = 1$

نضع س = 1: ق (2) = 3  $\times (2) = 6 + 12 = 18 \leftarrow \text{ق (2)} = \frac{18}{3} = 6$



## الاشتقاق الضمني

تعلم أن  $\frac{d}{ds} (3s) = 3$  ويقصد بـ  $\frac{d}{ds}$  (مقدار) هو مشتقة ذلك المقدار بدلالة

المتغير  $s$  فمثلاً:  $\frac{d}{ds} (3s^2 + 4s) = 6s + 4$  حيث  $s = 10$

بينما  $\frac{d}{ds} (3s^2) = 6s$  تعني مشتقة  $s$  بالنسبة لـ  $s$

وأيضاً:  $\frac{d}{ds} (2s^2 + 3s) = 4s + 3$  حيث  $s = 12$  م متغيران

وهذه هي فكرة الاشتقاق الضمني أي اشتقاق متغير بدلالة متغير آخر

فمثلاً:  $\frac{d}{ds} (4s^2 + 3s) = 8s + 3$  حيث  $s = 10$

$$= 8s + 3$$

ونستفيد من الاشتقاق الضمني في عملية اشتقاق العلاقات الضمنية.

مثال

$$3s^2 + 2s^2 = 8s - 4s \quad \text{جد: } \frac{d}{ds}$$

الحل

(1) نشق جميع الحدود كل حد على حده بدلالة  $s$

$$3s^2 + 2s^2 = 8s - 4s \quad \frac{d}{ds}$$

(2) نقوم بعملية تجميع الحدود التي تحوي  $\frac{d}{ds}$  على طرف والتي لا تحويه على

$$\text{الطرف الآخر} \leftarrow 3s^2 + 2s^2 = 8s - 4s \quad \frac{d}{ds}$$

$$(3) \text{ نأخذ } \frac{d}{ds} \text{ عامل مشترك} \leftarrow \frac{d}{ds} (3s^2 + 2s^2) = 8s - 4s$$

$$(4) \text{ نقسم على المقدار المضروب في } \frac{d}{ds} \leftarrow \frac{d}{ds} = \frac{8s - 4s}{3s^2 + 2s^2}$$



مثال

$$2 = \frac{1}{ص} + \frac{س}{ص} \text{ جد : } \frac{دص}{دس} \text{ عند } دس = 2$$

الحل

نعوض قيمة س لايجاد ص

$$4 = ص \leftarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 = \frac{2}{ص} \leftarrow 1 = \frac{2}{ص} + \frac{1}{2}$$

نوجد المقام:  $1 = \frac{ص + س^2}{ص \times ص}$  وبالضرب التبادلي  $\leftarrow ص + س^2 = س \times ص$

وبالاشتقاق  $1 \times \frac{دص}{دس} + س^2 = س \times \frac{دص}{دس} + ص \times 1$

بالتعويض:  $\frac{دص}{دس} + 4 = 4 + \frac{دص}{دس} \times 2 = 4 + \frac{دص}{دس} \leftarrow 4 - 4 = \frac{دص}{دس} = صفر$

مثال

$$ص^5 - س^3 = 2ص^2 = 2س^2 + 6 \text{ جد : } \frac{دص}{دس}$$

الحل

نشتق  $5ص^4 \times \frac{دص}{دس} - \frac{دص}{دس} \times (2س^2 \times 2ص + 6 \times 2س) = 10س^4$

$$5ص^4 \times \frac{دص}{دس} - \frac{دص}{دس} \times 6س^2 = 10س^4 \times \frac{دص}{دس} - 12س^4$$

$$\frac{5ص^4 - 6س^2}{دس} = \frac{10س^4 - 12س^4}{دص}$$

مثال

$$س^3 + 3ص^2 = 5س - 3 \text{ جد : } \frac{دص}{دس} \text{ عند } (1, 1)$$

الحل

نشتق:  $3س^2 + 6ص = 5 - 3 \times \frac{دص}{دس} + 5 \times \frac{دص}{دس}$

$$\frac{3س^2 - 5ص}{دس} = \frac{دص}{دس} \leftarrow 3س^2 - 5ص = \frac{دص}{دس} \times 5 - \frac{دص}{دس} \times 3$$

$$1 - \frac{2}{2} = \frac{1 \times 3 - 1 \times 5}{1 \times 5 - 1 \times 3} = \frac{3 - 5}{5 - 3} = \frac{-2}{2} = -1$$



$$\begin{aligned}
 & \frac{(5 - \frac{ص}{دس} \times 6) (3ص - 5ص) - (\frac{ص}{دس} \times 5) (5 - 3ص)}{(3ص - 5ص)^2} = \frac{ص}{دس} \\
 & \frac{(5 - 1 - 1 \times 6) (1 \times 3 - 1 \times 5) - (6 - 1 - 1 \times 5) (5 - 3)}{(5 - 3)^2} = \frac{ص}{دس} \\
 & 11 = \frac{44}{4} = \frac{22 + 22}{4} = \frac{(11-)(2) - (11-)(2-)}{4} = (1,1)
 \end{aligned}$$

مثال إذا كانت  $ص^2 - 2ص = 1$  أثبت أن  $ص^3 \times ص'' = 1 + صفر$

الحل

يمكن أن نستخدم  $ص'$  بدلاً من  $\frac{ص}{دس}$

$$\begin{aligned}
 \frac{ص}{دس} &= \frac{ص^2}{ص} = ص' \leftarrow ص^2 \times ص = ص^2 \leftarrow 0 = ص' \times ص - 1 \\
 \frac{ص - ص \times ص}{ص^2} &= \frac{ص \times ص - 1 \times ص}{ص^2} = ص'' \text{ مرة ثانية: } ص'' \\
 \frac{1 - \frac{ص^2 - 2ص}{ص}}{\frac{ص}{ص^2}} &= ص'' \leftarrow \frac{ص^2 - 2ص}{ص^3} = ص'' \leftarrow \frac{ص}{ص^2} = ص'' \\
 \frac{1 - \frac{ص^2 - 2ص}{ص^3}}{\frac{ص}{ص^3}} &= ص'' \leftarrow \frac{ص^2 - 2ص}{ص^3} = ص'' \leftarrow \frac{ص}{ص^2} = ص'' \\
 ص^3 \times ص'' &= 1 - ص'' \leftarrow ص^3 \times ص'' = 1 + صفر
 \end{aligned}$$







مثال

إذا كانت ص =  $2n^2 + 3n$  ، س =  $3n^2 + 5n$  فجد  $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$  عند  $n = 1$

الحل

$$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 2n^2 + 3n \quad \leftarrow \quad \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 3n^2 + 5n \quad \frac{1}{5n^2 + 6n} = \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$$

$$1 = \text{عند } n \quad \frac{2n^2 + 3n}{5n^2 + 6n} = \frac{\text{دن}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\frac{7}{11} = \frac{1 \times 4 + 1 \times 3}{5 + 1 \times 6} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

مثال

إذا كانت ص =  $2n^2 + 5n$  ، س =  $3n^2 - 4n$  فجد  $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$  عند  $n = 2$

الحل

$$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{2n^2 + 5n}{3n^2 - 4n} \quad \frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{9 \times 2} = \frac{2n^2}{5n^2 + 2n^2} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$$

$$\frac{1-}{12} = \frac{\text{دن}}{\text{دس}} \quad \leftarrow \quad 12- = \frac{12-}{2(3-4)} = \frac{2 \times 6-}{2(3-2n^2)} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

$$\frac{1-}{18} = \frac{1-}{12} \times \frac{4}{6} = \frac{\text{دن}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

مثال

$$\text{ص} = 2\text{ن} + 8, \text{س} = \frac{2}{\text{ن}}, \text{جد: } \frac{2\text{ص}}{2\text{س}}$$

الحل

$$\frac{2\text{ن}}{2-} = \frac{\text{دن}}{\text{دس}} \leftarrow \frac{2-}{2\text{ن}} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}}, \quad 8 + 2\text{ن}6 = \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$$

$$2\text{ن}4 - 4\text{ن}3 = \frac{2\text{ن}}{2-} \times (8 + 2\text{ن}6) = \frac{\text{دن}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\frac{2\text{ن}}{2-} \times (\text{ن}8 - 2\text{ن}12-) = \frac{\text{دن}}{\text{دس}} \times (\text{ن}8 - 2\text{ن}12-) = \frac{2\text{ص}}{2\text{س}}$$

$$2\text{ن}4 + 5\text{ن}6 =$$

مثال

$$\text{إذا كانت ص} = \sqrt{\text{س} + 1} + 2 \text{ أثبت أن } \sqrt{\text{س} + 1} + 2 \times \text{ص} = \text{ص}$$

الحل

$$\text{بالتربيع: ص}^2 = \text{س} + 1 + 2\sqrt{\text{س} + 1}$$

$$\frac{\text{ص}^2}{\sqrt{\text{س} + 1}} = \frac{\text{س} + 1 + 2\sqrt{\text{س} + 1}}{\sqrt{\text{س} + 1}} = \frac{\text{س}^2}{\sqrt{\text{س} + 1}} + 1 = \text{ص}^2 \times \text{ص} = \text{ص}$$

$$\therefore \text{ص}^2 = \sqrt{\text{س} + 1} \times \text{ص} \times \text{ص}$$

$$\text{ص}^2 = \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}} = \sqrt{\text{س} + 1}$$