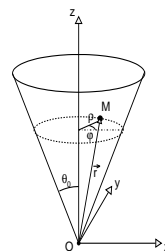


TD de Mécanique Analytique & Vibrations  
Série N° 2  
Filière SMP S5

## Exercice 1 : Multiplicateurs de Lagrange

Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  qui se déplace sur la face intérieure d'un cône d'ouverture  $2\theta_0$ . La position de  $M$  est repérée par ces coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$  ; voir figure ci-contre.



1. Dénombrer les forces appliquées à  $M$  et donner la contrainte de la liaison sous la forme  $f(\rho, \phi, z) = \rho - z \tan \theta_0 = 0$ .
2. Ecrire le lagrangien  $\mathcal{L}_0(\rho, \phi, z, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{z}; t)$  de  $M$  sans tenir compte de la contrainte.
3. Considérer le nouveau lagrangien  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \lambda f(\rho, \phi, z)$ , où  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange.
  - i- Ecrire les équations de Lagrange.
  - ii- Trouver deux intégrales premières.
  - iii- A l'aide des équations du mouvement, trouver  $\lambda$  en fonction des coordonnées.
  - iv- Etablir l'expression des composantes généralisées de la force de liaison agissant sur  $M$ .
  - v- Montrer que la force de liaison est normale à la surface intérieure du cône.

## Exercice 2 : Champ de force central - Hamiltonien

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  soumis à une accélération centrale dirigée vers un point fixe  $O$  et donnée par l'expression

$$\frac{1}{r^2} \times e^{-\frac{k}{r}}$$

où  $r = \|\vec{OM}\| > 0$  et  $k$  est une constante.

1. En utilisant le théorème du moment cinétique, déduire que le mouvement est plan.
2. Le mouvement de  $M$  sera dans la suite étudié sur ce plan. En déduire les coordonnées généralisées les plus appropriées.
3. Etablir l'expression du lagrangien de  $M$ , les moments conjugués et enfin l'expression de l'hamiltonien de  $M$ . En déduire une intégrale première du mouvement. Commenter.
4. Etablir les équations du mouvement à partir de l'hamiltonien.
5. Montrer qu'une orbite circulaire de  $M$  est possible et que celle-ci n'est stable<sup>1</sup> que si son rayon est grand devant  $k$ .

---

1. L'orbite est stable si l'équation établie a une solution.

### Exercice 3 : Portrait de phase d'une particule évoluant dans un puit de potentiel

Considérons une particule libre évoluant selon une dimension  $x$  entre deux murs, séparés par une distance égale à  $L$ , dont le potentiel peut être modélisé comme suit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Tracer le portrait de phase.

### Exercice 4

Considérons la transformation linéaire définie de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  par

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

A quelle condition cette transformation est canonique ?

### Exercice 5 : Encore des transformations canoniques !

Considérons la transformation donnée par

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \cos \alpha + \frac{P_2}{m\omega} \sin \alpha & q_2 &= Q_2 \cos \alpha + \frac{P_1}{m\omega} \sin \alpha \\ p_1 &= -m\omega Q_2 \sin \alpha + P_1 \cos \alpha & p_2 &= -m\omega Q_1 \sin \alpha + P_2 \cos \alpha \end{aligned}$$

1. Etablir l'expression de la matrice jacobienne  $M$ . Est-elle symplectique ? Commenter.
2. On cherche la fonction génératrice  $F_2(q_i, P_i)$  de type 2, où  $i = 1, 2$ , décrivant cette transformation.
  - i- Déterminer la fonction génératrice  $F_2$  en fonction  $m, \omega$  et  $\alpha$ , ces dernières étant constantes.
  - ii- Etablir l'expression du nouvel hamiltonien  $H'(Q, P)$  si

$$H(q_i, p_i) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 + q_2^2).$$